30818/R

N · III 2
4

30818/R

DISSERTATIONES MATHEMATICAE ET PHYSICAE

QVAS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARVM GOTTINGENSI

ANNIS

CIↃIↃCCLVI - - CIↃIↃCCLXVI

EXHIBVIT

ABRAHAM GOTTHELF KAESTNER

CONSIL. REG. AVL. MATH. ET PHYS. P. P. O. SOC. REG. SCIENT. GOTTING. ET SOC. REG. OECONOM. BRVNSVICO LVNEB. SODALIS; SOC. REG. TEVTON. GOTTING. SENIOR. ACADD. REGG. SCIENT. SVECIC. ET PRVSS. ACAD. ELECTORAL. SCIENT. VTIL. ERFORDINAE; ACADD. BONONIENS. ET AVGVSTAE PERVSINAE; SOCIET. ELECTORAL. APVM COLENDAR. LVSATICAE; SOCC. TEVTON. ET LIBB. ART. LIPSIENSIVM, LATINAE ET TEVTONICAE IENENSIVM, LATINAE MARCHICO BADENSIS SODALIS.

ALTENBVRGI

EX OFFICINA RICHTERIA CIↃIↃCCLXXI.

WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

SERENISSIMO DOMINO

DOMINO

WILHELMO

COMITI REGNANTI SCHAVMBVRGI

NOBILI DOMINO ET COMITI

LIPPIAE ET STERNBERGI

EQVITI ORDINIS REGII PRVSSICI

AQVILAE NIGRAE

REGIS FIDELISSIMI PORTVGALLIAE

ET ALGARBIAE

EXERCITVVM GENERALISSIMO

REGIAE MAIESTATIS MAGNAE BRITANNIAE

ET ELECTORIS BRVNSVICO LVNEBVRGICI

EXERCITVVM SVMMO DVCI

HAEC OPVSCVLA

HVMILLIME OFFERT

ABRAHAM GOTTHELF KAESTNER.

SERENISSIME DOMINE,

Passurum TE esse, vt ad TE acce-

dant dissertationes mathematicae,

spem facit, quod de doctrinarum mathema-

ticarum vsu nemo rectius statuere possit, TE,

qui

qui et olim eas in consilium semper adhibuisti, siue Germaniam tuereris siue Lusitaniam; et iam iisdem ad pacis artes translatis, hoc consequeris, vt beatiores viuant, a DIVINA PROVIDENTIA TVAE curae et indulgentiae crediti; Scholae autem militari, in insulis quas creasti constitutae, leges scripsisti quales doctius poterat scribere nullus nostrum, qui in geometrico puluere consenuimus.

Sed et illam purissimam voluptatem, ex veri, certique sensu oriundam, quanti facias, osten-

oſtendit numus, in quo Archimedis de globi cylindri et coni ratione inuentum exhibes, adſcribi vero iuſſiſti haec: FRVCTVS LITTERARVM MENS SANA.

Eodem hoc, quod numus TVVS exhibet diagrammate, ductus olim Cicero, indagauit Syracuſani ſenis, ignoratum ipſis geometrae ciuibus ſepulcrum: TV vero monimentum vt Abbtio ſtruxiſti marmoreum, ita aureum conſecraſti Archimedi.

Faxit

Faxit DEVS *vt* TE, DOMINE SERENISSIME *praeter illas omnes quae* TE *praesidium et decus suum suspiciunt regiones, et nostra litterarum respublica fospite et incolumi quam diutissime fruatur. Dabam Gottingae d.* 25. *Augusti A. Aerae Christianae* cIↃIↃccLXX.

LECTV-

LECTVRIS.

Commentariorum Societatis Regiae Scientiarum Gottingenſis Tomus quartus ad annum 1754. prodiit, ſumtibus Eliae Luzac. Poſt, Societatis integrae commentarii nulli editi, quidam ſodalium ſuas commentationes ſingularibus libris exire paſſi ſunt. Hoc, quod omnibus concedebatur, ne et ego vte-

rer,

rer, impedierunt me alia negotia, retinuit ſpes, commentariorum Societatis nomine appariturorum.

Iam, cum eo res deducta ſit, vt publicari poſſint, quae ſodales recitarunt anno proxime elapſo; antiquiora quaedam ſola edi e re viſum eſt. Eo pertinet libellus qui prodit.

Commentationum, annis quos titulus indicat praelectarum duas huic collectioni non inſerui, ambas anni 1760.

Altera, d. 8. Mart. adieci quaedam methodo integrandi differentialia binomia quam habet Dom. de Bougainville iun. (*) Hic inter alia, formulas generales inueſtigaui, coefficientium, tum, terminorum partis algebraicae ſeriei eius qua integrale exhibetur, tum, partis ſummatoriae; Qua re id conſequutus ſum, vt, quando integrale fiat algebraicum, euaneſcente coefficiente partis ſummatoriae facilius agnoſcatur, item eruatur, quid faciendum ſit, cum coefficientes fiunt infiniti.

Eius ſcripti contenta paulo poſt editae a me Analyſi infinitorum inſerui (**). Sed tota haec methodus in qua laboraueram, in integrationibus eius ope perficiendis, operae pretium non facere mihi vide-

(*) Traité du calcul integral. P. I. ch. V. - - VIII.

(**) Anfangsgründe der Analyſis des Unendlichen (Gott. 1761.) §. 403. 404.

videbatur. Itaque, premere hoc ſcriptum decreueram, et in noua analyſeos meae infinitorum quae aeſtate hac prodiit editione, huius methodi loco vtiliora docere, etiam antequam legiſſem, quibus limitibus coerceat, quae integrationem formularum irrationalium iuuare poſſint, ille, cui de integrandi artificiis pronuncianti, nemo non eamdem fidem adhibeat, quam Archimedi Hieron adhiberi iuſſit (*).

Die 12. Iulii 1760; protuli, quam demonſtrationem iudico, formulae, cui mechanica ſublimior omnis innititur, qua elementum velocitatis, proportionale ſtatuitur, producto, ex potentia in elementum temporis. Et haec ratiocinia, aptum locum inuenere, in mechanica quam edidi ſublimiori (**), ibique ſe probarunt intelligentibus. Quod non impediturum erat me, quin de illis hac occaſione mathematicorum, exterorum inprimis ſententias colligerem; Sed, quae ſatis perſpicue poterant dici in ſyſtemate, de iis vidi, ſeparatim, difficilius ita differi vt non, vel taedium creetur exercitatioribus, incipiendo ab iis, quae nimis vulgaria ſunt, vel, reſecando haec, ipſi demonſtrationis nerui praeſcindantur, et obſcura fiat,

 quae

(*) Euler; Inſtitut. Calc. Integral. Vol. I. §. 125.

(**) Anfangsgründe der höhern Mechanik (Gott. 1761) I. Abſchn. 56--65 §.

quae breuis esse debebat. Ea res, si alia vice tentanti melius succedat, cogitata mea publicandi non deerit opportunitas.

Tantum de iis, quae hic non habentur. Eorum quae prodeunt, quaedam ita sunt comparata, vt nullo omnino vsu, in consessu Societatis lecta fuissent integra. Quis enim calculos recitantem, et ad diagrammata perpetuo se referentem, auditor vnice, etiam ipse profundior geometra, adsequatur? In his igitur operam dedi, vt, qua de re dicerem, et quantum intersit de ea differere, et quid alii essent circa illam conati, ita explicarem, vt non sine voluptate, et cum fructu aliquo, audirent me, qui non toti essent in meis studiis. Eas praefationes, et hic spero profuturas lectoribus, etiam in puluere geometrico exercitatis, ad cognoscendum argumentum dissertationis, antequam ipsam ingrediantur.

Quaedam forte parum mathematica iudicabuntur, illis, qui mathematici subtilitatem, vnice ex calculis aut diagrammatibus aestimant: Sed mihi *mathesis* est *philosophia quanti*, iis rebus, inter multa alia praestans reliquae philosophiae, quod sensus, atque imaginandi facultatem, quibus impediri se ceteri philosophi saepius queruntur, ipsa habeat, in cognoscendo et inuestigando vero, intellectui subseruientes; signis autem, quibus relationes quantitatum exprimit,

id

id obtinuerit, vt vtatur lingua vere philoſophica, cuius non ea ſola ſit virtus, quae ſumma iudicatur linguarum vulgarium, vt apte dici queant omnia quae ſcimus, ſed, quae praeter haec doceat nos, quae adhuc neſciebamus.

Vt vero in quauis arte, non recte adhibentur, voces, et loquendi formulae, illi arti propriae, ante notiones illis reſpondentes, populari ſermone explicatas: Ita ad algebraicam dictionem, nimium properatur, antequam ſatis cognouerimus res, quarum ſignis illa vtitur.

Penultimam diſſertationem, de *lege continui* edidi Lipſiae 1750; probatam tunc Dom. de Maupertuis; quem et mihi fauiſſe, ſemper cum voluptate recordor. Hunc autem locum illi dandum eſſe credidi, quoniam continui lex, aeque ac infinitum et inertia, ad illa pertinet, de quibus, in confiniis plurium ſcientiarum poſitis, id valet, quod, ſermone cuius ornatus forte non ſit noſtri ſaporis; vere tamen, dixit Weigelius: „Mathematicum, niſi metaphyſici „pariter ac phyſici regni penetrauerit conſilia, confoederatam ſuam „rempublicam, ſartam tectamque conſeruare nequaquam poſſe (*).“

 Socie-

(*) Erhardi Weigelii Analyſis Ariſtotelica ex Euclide reſtituta. (Ienae 1658.) pag. 259.

Societati, cui exterorum ſodalium vnus, inde a prima eius inſtitutione iunctus eram, Lipſia miſi ſcriptum de angulorum ſectionibus, quod hic vltimo loco legitur; Id, commentariis non prodeuntibus, edi non potuerat: Igitur, illo, vt indicatum reperient lectores vſus ſum, hic autem adiiciendum duxi. Dab. Gottingae M. Auguſto A. Aer. Chriſt. cIↃ IↃ CC LXX.

CATA-

CATALOGVS DISSERTATIONVM.

I. *Demonſtratio theorematis Newtoniani de relatione inter coeffi-cientes aequationis, et ſummas potentiarum radicum* pag. 1

II. *De multiplicatione imaginum ope duorum ſpeculorum planorum* 8

III. *De minimo in reflexione* - - - 22

IV. *In aequationibus differentialibus homogeneis ſeparari poſſe indeterminatas* - - - 27

V. *De vera infiniti notione* - - - 35

VI. *Ad theoriam cochleae pertinens obſeruatio geometrica* 38

VII. *Gnomonica vniuerſalis analytica* - - 42

VIII. *Eorum quae lacrymis vitreis accidunt noua ratione explicandorum tentamen* - - - 59

IX. *Quot ſphaerae vitreae aequales mediam, et ſe mutuo tangere poſſint?* - - - - 62

X. *De inertia corporum* - - - 75

XI. *De translatis in dictione geometrarum* - - 79

XII. *Theoria proiectionis ſtereographicae horizontalis* - 88

XIII. De

XIII. *De lege continui in natura* - - 142

XIV. *Vnde plures inſint radices, aequationibus ſectiones angulorum definientibus* - - - 150

Additamentum ad n. 8. - - - 175

I. Demon-

I.

Demonſtratio

Theorematis Newtoni de relatione inter coefficientes aequationis determinatae, et ſummas potentiarum radicum.

d. 8. Ianuar. 1757.

Theorema, de quo dicturus ſum, absque demonſtratione, vt alia multa, edidit Newtonus Arithmeticae vniuerſalis p. 192. edit. s' Graveſandii ſub finem capitis de transmutationibus aequationum. Vtuntur illo Io. Bernoullius (*) et Eulerus (**) ad ſeries ſummandas. Bernoullius dicit, eſſe ſibi demonſtrationem, quam non reperio in operibus eius. Quas vidi demonſtrationes Euleri (***), Landenii (****) calculo infiniteſimali nixas, eae videntur mihi in aequationibus graduum quorundam determinatorum rem confi-

(*) Opp. T. IV. n. 153. art. 8.
(**) Act. Acad. Imp. Petrop. T. VII.
(***) Opuſculor. T. II. p. 108.
(****) Mathematical Lucubrations by John Landen (Lond. 1755.) Part. V. art. 1.

conficere, an ſatis perſpicuum ſit, eadem lege omnes aequationes graduum altiorum teneri, ea de re nihil definio, fateor enim has demonſtrationes curatius me non examinaſſe, cum mihi ſatisfaceret, in quam olim incidi, nihil commune habens cum illis, nec cum alia etiam edita Baermanni V. Cl. Mathematum Profeſſoris Vitebergenſis (*). Demonſtratio mea huc redit: Oſtendo: ſi locus ſit theoremati Newtoniano in aequatione aliqua gradus determinati, locum eſſe eidem in aequatione gradus proxime altioris. Breui autem calculo reperitur, locum eſſe theoremati in aequationibus quadratica et cubica. Igitur locum habere in biquadratica, intelligitur, non quod calculo ad hanc aequationem applicato id reperiatur, ſed quod oſtenſum ſit, valere de aequatione gradu vno altiore, ſi valeat de aequatione certi cuiusdam gradus. Similiter, cum ita ſciamus, valere illud pro aequatione quarti gradus, inferimus, valere pro aequatione gradus quinti, et a quouis gradu ad proximum progreſſi, vniuerſale illud eſſe pronunciamus.

Hanc methodum ad demonſtrandos terminos generales ſerierum figuratarum adhibitam a Iacobo Bernoullio (**), primum ab Hauſenio didici (***), eiusque vſum inſignem expertus ſum in euincendis propoſitionibus multis, quae plerumque etiam a ſummis mathematicis in vniuerſum verae ſumuntur, quoniam illas in caſibus particularibus recte ſe habere compertum eſt. Id inferendi genus logici *inductionem incompletam* apellant, a quo crediderim, mathematicos eo magis abſtinere debere, quoniam, ſi vti illo vellent, quod experti ſunt in caſibus paucis, exſpectarent, non in multis, (et id iam minus eſſet tutum) ſed in infinitis. Si quantitatis ex duabus partibus conſtantis formetur quadratum, aut cubus, terminorum inter primum et vltimum mediorum coefficientes ſunt, binarius in quadrato, ternarius in cubo, hoc eſt, iidem ac potentiae exponentes. Quam vero falleretur, qui hinc inferret, coefficientes terminorum intermediorum quartae potentiae etiam omnes aequari exponenti? Et haec quidem lex, quam quis ex duabus prioribus potentiis colligeret, tertio experimento refelleretur. Quid vero, ſi lex aliqua ex decem aut centum caſibus colligeretur, puta; ſi ex tot terminis ſeriei cuiusdam infinitae, abſtractione conderetur terminus generalis?

(*) Demonſtratio theorematis Algebraici, Viteberg. 1745. plagulae 2. Cum vltimum inuiſerem amicum, ex vrbe patria communi abiturum, donabat me hoc ſuo ſcripto, quo orationem muneris ſui capeſſendi cauſſa Vitebergae habendam indicabat. Legere coepi domum reuerſus, ſed, quod vnum eſt e vitiis meis, impatientior legendarum demonſtrationum paulo prolixiorum, non abſolui lectionem, coepi vero ipſe de demonſtratione cogitare, et eadem veſpera vnae alteriusue horulae ſpatio eam obtinui, quam hic edo, eamque die ſequenti Amico miſi. Obiit Baermannus Viteb. d. 6. Febr. 1769.

(**) Ars coniectandi Part. II. cap. 3. Lemm. 4.

(***) Elem. Arithmet. Prop 23.

lis? Num decem aut centum ad infinitum maiorem rationem habent, quam duo aut tria (*).

Geometras igitur infinitae caſuum multitudini generalem legem laturos incompletam illam inductionem, minus tuto adhibere, exiſtimem; completam adhibere infinita multitudo non permittit.

Neque etiam completa illa inductio noui aliquid docet, ſed ſaltim plura enunciata vnico complectitur. Qui igne liquari, ſolidum autem malleo obedire expertus eſt, aurum, argentum, cuprum, ferrum, ſtannum, plumbum, is ſi has materias communi metalli nomine appellet, et metallum omne fuſile eſſe, ac malleabile pronunciet, ſex propoſitiones ad vnicam reducit, noui, quod illis propoſitionibus non dixerit, nihil hac vnica dicit. Itaque breuiter multa docere poſſunt, qui hac inductione vtuntur, noui nihil inueniunt.

Supereſt illud inductionis genus, de quo ante dixi, certitudinem praebens, et inueniendo aptum. In illo formula quaedam generalis colligitur ex paucis experimentis, eadem vero tenentur infinita, in quibus veritatem eius non experti ſumus, dummodo euictum ſit, ſi in vnico quodam caſu locum habeat, locum habere etiam in proximo. Vt quatenus patris nobilis filius etiam nobilis eſt, eatenus ſuffecerit in familia quadam, vnius nobilitatem oſtendiſſe, vt eius poſteri omnes nobiles iudicentur.

Huius methodi vim expertus ſum in innumeris rigoroſe demonſtrandis, quae vulgo inductione incompleta ſumuntur. Quomodo illam in negotio, circa quod iam verſor, adhibuerim ſequentia docebunt.

Poteſt Newtoni theorema ita generatim explicari. Aequationis gradus m, ad formam conſuetam reductae pars continens incognitae potentiam altiſſimam ſit ad vnum latus ſigni aequalitatis, reliquae omnes ſint ad alterum. Harum partium coefficientes ordine, quo deſcendunt ipſius x potentiae ſint α, β, γ, δ, - - dicatur vero radicum ſumma R, ſumma quadratorum radicum R2, ſumma cuborum R3, et ſic generatim ſumma potentiarum exponentis r ſit Rr, erit

$$R = \alpha$$
$$R2 = \alpha . R + 2\beta$$
$$R3 = \alpha . R2 + \beta R + 3\gamma$$
$$R4 = \alpha . R3 + \beta R2 + \gamma R + 4\delta$$

et generatim

$$Rr = \alpha . R(r-1) + \beta . R(r-2) + \gamma . R(r-3) + \delta . R(r-4) \ldots\ldots + \varrho . R + r . \sigma$$

vbi σ eſt coefficiens ad incognitae potentiam exponentis m-r, ϱ vero proxime praecedens. Huic formulae locus eſt pro omnibus r ipſo 1 maioribus vsque ad r = m.

 Exem-

(*) Dum haec, vt edantur relego, offert Eulerus exemplum legis, decem priores ſeriei cuiusdam terminos tenentis, ſed ad vndecimum non pertingentis. *Obſeruationes Analyticae* in Comm. Nou. Ac. Imp. Petr. T. XI. p. 128.

Exemplum: Sit $x^4 = x^3 + 19x^2 - 49x + 30$.
Hic m = 4, et ſi applicari poteſt huic aequationi theorema, ſequentia obtinent.
$\alpha = 1$, $\beta = 19$, $\gamma = -49$, $\delta = +30$,
Primo igitur R = 1.
Deinde ſit r = 2; eſt m — r = 2; et $\sigma = \beta = 19$ et
$R2 = 1.\ R + 2 . 19 = 1 + 38 = 39.$
Porro ſit r = 3; eſt m — r = 1; $\sigma = \gamma = -49$ et
$R3 = 1.\ R2 + 19.\ R - 3.\ 49 = 1.\ 39 + 19 - 3.\ 49 = -89.$
Tandem ſit r = 4; eſt m — r = 0; $\sigma = \delta = +30$ et
$R4 = 1.\ R3 + 19.\ R2 - 49.\ R + 4 . 30. = -89 + 19 . 39 - 49 + 120 = 723.$
Sunt vero aequationis radices 1; 2; 3; — 5;
Itaque R = 1 + 2 + 3 — 5 = + 1.
R 2 = 1 + 4 + 9 + 25 = 39.
R 3 = 1 + 8 + 27 — 125 = — 89.
R 4 = 1 + 16 + 81 + 625 = 723.

Exemplum 2. Aequationis habentis radices imaginarias
$x^3 = * - 6x - 20$. Hic m = 3; $\alpha = 0$; $\beta = -6$; $\gamma = -20$;
Ergo ex threoremate Newtoni R = 0; deinde r = 2; m — r = 1; $\sigma = \beta = -6$;
et $R2 = 0 - 2 . 6 = -12$; tandem r = 3; m — r = 0; $\sigma = \gamma = -20$;
$R3 = 0 + 0 - 3 . 20 = -60.$
Sunt vero radices $1 \pm 3\sqrt{-1}$ et — 2; quarum ſumma vtique eſt = 0, ſumma quadratorum — 12; cuborum — 60.

Theorematis explicati demonſtrationem ita concepi.

Prop. I.

I. Reperire relationem inter ſummas potentiarum radicum aequationis quadraticae, et coefficientes aequationis.
II. Idem praeſtare pro aequatione cubica.

I. Aequationis quadraticae.
$x^2 - Ax - B = 0$
radices ſint g, h, ita vt aequatio naſcatur ex producto (x—g). (x—h). poſito = 0
Erit g + h = A; gh = — B.
Eſt vero $A^2 = (g + h)^2 = g^2 + 2gh + h^2$, Ergo
$g^2 + h^2 = A^2 - 2gh = A.\ (g + h) + 2B.$

II. Aequationis cubicae radices ſint g, h, k, ita vt aequatio naſcatur ex producto
(x—g). (x—h). (x—k) poſito = 0 erit illa
$x^3 - gx^2 + ghx - ghk = 0$
$-h + gk$
$-k + hk$

Sit

Sit aequationis cubicae formula generalis

$$x^3 - Ax^2 - Bx - C = o$$

erit $g + h + k = A$;

$gh + gk + hk = -B$ et $ghk = C$;

Igitur $AA = gg + 2gh + hh + 2gk + 2hk + kk$
$= gg + hh + kk - 2B$.

Itaque $AA + 2B = gg + hh + kk$ ſeu

$$A(g + h + k) + 2B = gg + hh + kk$$

Porro loco x ponendo ſucceſſiue g, h, k, eſt

$g^3 = Agg + Bg + C$
$h^3 = Ahh + Bh + C$
$k^3 = Akk + Bk + C$

$g^3 + h^3 + k^3 = A(gg + hh + kk) + B(g + h + k) + 3C$
$= A(AA + 2B) + B.A + 3C.$

Prop. II.

Sit $x^m = \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots + \delta x^{m-n+1} + \varepsilon x^{m-n} + \zeta x^{m-n-1}$
$+ \pi x^{m-r+2} + \varrho x^{m-r+1} + \sigma x^{m-r} + \omega$

quam aequationem breuitatis cauſſa indicabo ſigno ⊙. Eius aequationis radices ordine ſuo ſumtae ſint g, h, - - - k vt ſit g prima, k vltima; numerus illarum erit m.

Summa radicum dicatur R; Summa quadratorum R2. quae itaque ſit gg + hh - - - + kk; et ſimiliter ſignificet $Ru = g^u + h^u - - - + k^u$ ſummam potentiarum exponentis u.

Quaeritur relatio inter coefficientes aequationis, et ſummam potentiarum exponentis m, ſeu Rm.

Sol. Procedendo, vt factum eſt ſub finem prop. praec. hoc eſt: Subſtituendo in locum ipſius x ſingulas radices, unam poſt alteram, habetur

$g^m = \alpha . g^{m-1} + \beta . g^{m-2} - - - - - + \omega$
$h^m = \alpha . h^{m-1} + \beta . h^{m-2} - - - - - + \omega$
$k^m = \alpha . k^{m-1} \quad \beta . k^{m-2} - - - - - + \omega$

$Rm = \alpha . R(m-1) + \beta . R(m-2) - - - - + m\omega$

Prop. III.

Formula Newtoni, cuius loco vtar Signo ☿, haec eſt:

$Rr = \alpha . R(r-1) + \beta . R(r-2) \ldots\ldots + \delta . R(r-n+1)$
$+ \varepsilon . R(r-n) + \zeta . R(r-n-1) \ldots\ldots \varrho . R + r\sigma$

Sumatur,

Sumatur, hanc formulam veram esse pro aequatione ☉ gradus m; ita, vt obtineat, positis in locum ipsius r, successiue m, m — 1, m — 2, cet. quouis valore non excedente m, sed maiore quam 1.

Hoc sumto, dico, sequi vt vera sit pro aequatione proxima gradus m + 1, posito r, in vtraque aequatione eodem.

Demonstratio: Ad radices aequationis Prop. II. accedat (m+1) ta quam vocabo l; ita vt productum ex factoribus (x — g). (x — h) . . . . . (x — k); qui sunt numero m, multiplicetur denuo per factorem (m+1) tum; (x — l)

Erit vero productum prius ex Prop. II.

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} \ldots\ldots - \delta x^{m-n+1} - \varepsilon x^{m-n} \ldots\ldots - \pi x^{m-r+2} - \varrho x^{m-r+1} \sigma x^{m-r} \ldots\ldots - \omega$$

Hoc productum, si multiplicetur per x — l prodit, vt facile perspiciet quiuis parum exercitatus in formandis multiplicatione aequationibus superioribus ex inferioribus, vt vulgo docent Analystae

$$x^{m+1} - (\alpha + l)\, x^m - (\beta - \alpha l)\, x^{m-1} \ldots\ldots - (\varepsilon - \delta l)\, x^{m-n+1} - (\zeta - \varepsilon l)\, x^{m-n} \ldots\ldots - (\varrho - \pi l)\, x^{m-r+2} - (\sigma - \varrho l)\, x^{m-r+1} - (\tau - \sigma l) \cdot x^{m-r} \ldots\ldots$$

Id productum, si ponatur = o vt fiat aequatio cuius radices sint

g; h; - - - - k; l; numero m + 1; habebitur

$$x^{m+1} = (\alpha + l)\, x^m + (\beta - \alpha l)\, x^{m-1} \ldots\ldots + (\varepsilon - \delta l)\, x^{m-n+1} + (\zeta - \varepsilon l).\, x^{m-n} \ldots\ldots + (\varrho - \pi l).\, x^{m-r+2} + (\sigma - \varrho l).\, x^{m-r+1} + (\tau - \sigma l)\, x^{m-r} \ldots\ldots$$

Eam aequationem vocabo ☾.

Ergo cum Ru significet summam potentiarum radicum g, h, — — k exponentis u; sequitur, vt summa potentiarum eiusdem exponentis, radicum g, h, - - - k, l, sit $Ru + l^u$.; haecque erit summa potentiarum exponentis u, radicum aequationis ☾.

Newtoni formula, quia illam sumo, valere pro aequatione ⊙ gradus m; sumitur a me valere pro quouis valore, qui non excedit m.

Eadem formula, si valere debeat pro aequatione ☾; et quidem pro r eodem, pro quo valere sumitur in ⊙, necesse est, vt sequens aequatio vera sit:

$$Rr + l^r = (\alpha + l).\,(R\,(r-1) + l^{r-1}) + (\beta - \alpha l).\,(R\,(r-2) + l^{r-2}) \ldots\ldots + (\varepsilon - \delta l).\,(R\,(r-n) + l^{r-n}) + (\zeta - \varepsilon l).\,(R\,(r-n-1) + l^{r-n-1} \ldots\ldots + (\varrho - \varpi l).\,(R + l) + r.\,(\sigma - l\varrho)$$

quam vocabo ☌. Oritur, in formula Newtoni ☿, ponendo vbique $Ru + l^u$ loco Ru; et coefficientes aequationis ☾ adhibendo loco coefficientium aequationis ⊙, $\alpha + l$ loco α; $\beta - \alpha l$ loco β, et sic porro.

Haec autem aequatio vera esse non potest, nisi vera sit etiam sequens, quae oritur subducendo ☿ a ☌, sinistra a sinistris, dextra a dextris

$l^r =$

$$
\begin{aligned}
l^r = {} & \alpha.\ l^{r-1} + \beta.\ l^{r-2} \\
& + l.R(r-1) - \alpha.\ lR(r-2) \\
& + l^r - \alpha.\ l^{r-1} \\
& \ldots + \varepsilon.\ l^{r-n} \ldots + \zeta.\ l^{r-n-1} \ldots \\
& - \delta.\ l.R(r-n) - \varepsilon.\ lR(r-n-1) \\
& - \delta.\ l^{r-n+1} - \varepsilon.\ l^{r-n} \\
& \ldots\ldots + \varrho l + r\sigma \\
& - \pi l.R - r\varrho l \\
& - \pi l^2
\end{aligned}
$$

quam vocabo $\mathcal{U}$.

In hac aequatione $\mathcal{U}$, deſtruunt ſe ipſius l potentiae exponentis r, in latere ſiniſtro, et in latere dextro; deinde lateris dextri columna quaeuis habet partem ſupremam, aequalem at oppoſitam parti infimae columnae ſequentis; ita ſibi opponuntur pars ſupremae columnae primae, et infima ſecundae, item $+\varepsilon.\ l^{r-n}$ et $-\varepsilon.\ l^{r-n}$. Omittendo igitur quae ſe deſtruunt, haec aequatio $\mathcal{U}$ abit in ſequentem.

$$
\begin{aligned}
0 = l.(R.(r-1) - \alpha.\ R(r-2) \ldots - \delta.\ lR(r-n) - \varepsilon.\ lR(r-n-1) \\
\ldots\ldots - \pi.\ lR + \varrho.\ l(1-r))
\end{aligned}
$$

quae mihi dicitur $\mathfrak{h}$.
Seu diuidendo per l;

$$
\begin{aligned}
0 = R(r-1) - \alpha.\ R(r-2) \ldots - \delta.\ R(r-n) - \varepsilon.\ R(r-n-1) \\
\ldots\ldots - \pi R + \varrho.(1-\varrho)
\end{aligned}
$$

hoc eſt

$$
\begin{aligned}
R(r-1) = \alpha.\ R(r-2) + \beta.\ R(r-3) \ldots + \delta.\ R(r-n) + \varepsilon.\ R(r-n-1) \\
\ldots\ldots + \pi R + \varrho(r-1).
\end{aligned}
$$

quam aequationem voco $\mathfrak{P}$

Iam ſi in $\mathfrak{H}$ ſcribatur $r-1$ loco r, abit $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{P}$, ſcilicet vltimus $\mathfrak{H}$ terminus erat $r.\sigma$, quia σ erat coefficiens potentiae ipſius x exponentis $m-r$; eadem igitur lege aequationis eius, in quam abit $\mathfrak{H}$, poſito $r-1$ loco r; vltimus terminus eſt $(r-1).\varrho$, quia ϱ eſt coefficiens ad ipſius x potentiam, exponentis $m-(r-1) = m-r+1$;

Sumebatur autem $\mathfrak{H}$ vera pro quouis ipſius r valore, ergo in ea licet ponere $r-1$ loco r, et ſic vera eſt $\mathfrak{P}$.

Igitur ſumta $\mathfrak{H}$ pro r quouis ipſo m non maiore, vera eſt $\mathfrak{P}$; et regrediendo vera etiam eſt $\mathfrak{h}$.

Iam aequatio haec $\mathfrak{h}$. ita expreſſa cogitetur, vt l., tanquam factor, adſcribatur, ſingulis terminis factoris alterius, a quo ſeiunctum habetur in aequatione $\mathfrak{h}$; et ſic oriantur producta partialia, quorum ſumma eſt $= 0$.

Ad

Ad ♄ ita expreſſam addatur ſequens:

$$l^r = \alpha.\, l^{r-1} + \beta.\, l^{r-2} \text{ - - -}$$
$$+ l^r - \alpha.\, l^{r-1} \text{ - - -}$$
$$\ldots + \varepsilon.\, l^{r-n} + \zeta.\, l^{r-n-1} \text{ - - -}$$
$$- \delta.\, l^{r-n+1} - \varepsilon.\, l^{r-n}$$
$$\ldots\ldots - \pi\, l^2$$

Identica ſcilicet, quae conſtat terminis in ♃ ſe deſtruentibus. Ita naſcetur ♃ ex ♄.

Rurſus addatur ♃ ipſi ☿ et oritur ♂, cuius veritas debet oſtendi.

Itaque ſumtis ☿ et ♀, hoc eſt: ſumta formula Newtoni, pro aequatione gradus m, ſequitur, vt quamdiu non fit $r > m$; eadem formula vera ſit pro aequatione gradus $m + 1$

Non licet ponere $r > m$, quia debet in his ratiociniis eſſe r, idem in aequatione gradus $m + 1$ et in illa gradus m. Sed hanc ipſam ob cauſſam creſcere poteſt r vsque ad valorem m.

Supereſt igitur, vt oſtendatur, eſſe etiam ♂ veram, poſito $r = m + 1$; hoc autem pro ♂ oſtenditur, vt pro ☉ oſtenſum eſt in Prop. II.

Prop. IIII.

Formula Newtoni Prop. III. valet pro omnibus aequationibus, cuiuscunque magnitudinis ſint m, r;

Demonſtr. Poſito $m = 3$; valet formula pro r quouis, cui locus eſt in aequatione cubica Prop. I. ſeu pro ipſius r valoribus 1; 2; 3; Igitur valet pro biquadratica. (Prop. III.) Et iam ponere licet in Prop. III; $m = 4$; vnde colligitur formulam valere pro aequatione gradus quinti; et ponendo $m = 5$, colligitur valere pro aequatione gradus ſexti, et ſic a quauis aequatione progrediendo ad proxime ſuperiorem colligitur, valere pro aequatione gradus cuiusuis.

II.

De multiplicatione imaginum ope duorum Speculorum Lect. in Soc. R. Sc. G.

d. 9. Iulii 1757.

Contentorum Synopſis.

Poſt praefamen exponitur quaeſtio 1. principium Solutionis 4. 5. 7. Caſus duo; 1; 8, II; 9. numerus imaginum caſus primi 14. ſecundi 15. Locus imaginum

ginum 17. Series illarum duae 18. Numerus illarum in ſecunda 19. 20. Quomodo diſtinguantur Series? 22. vbi ſita ſit cuiusuis Seriei vltima? 26. quae ſingulis ſpeculis opponantur? 27. quae poſſint in vnam coire? 30. Summa imaginum vtriusque Seriei 31. Quot ſint imagines ſi angulus Speculorum ſit pars aliquota quatuor rectorum? 32. 33. Quando hoc caſu numerus imaginum mutato obiecti inter Specula ſitu mutetur aut non? 34. Quando eodem caſu coeant ultimae 35. Quando Sector circuli integrum circulum exhibeat? 36. Exempla caſus de quo dictum eſt in tabulas coniecta 37. Lineae in qua ſita eſt imago vltima poſitus ad Specula 39. De pluribus Speculis 40. De alia Solutione 41. De loco oculi imagines omnes viſuri 42-53.

PRAEFAMEN.

Obiecti Speculis duobus aut pluribus interpoſiti, imagines multas fieri; vt illis ſi vnum oſtenderis hominem populus appareat, vulgatum eſt, et ab artificibus opticis ad iucunda varia Spectacula oculis exhibenda translatum (*). Nec difficulter phaenomeni ratio obiter intelligitur, ſimulacra ab vno Speculo in aliud transmitti, ſuaque denuo ſimulacra formare. Hoc autem ſine fine non pergere, vel ex eo patet, quod imago quaeuis hebetatum lumen habeat praecedentis, a qua genita eſt, igitur haec imaginum proſapia, vt generis nobilitas, in iis, qui ſplendorem a proauis acceptum, nulla re quam ipſi fecerint augere volunt, paulatim euaneſcit. Sed praeter hanc *phyſicam* cauſſam, cur imagines deſinant, *geometrica* etiam eſt locum habitura, etſi omnes imagines aeque lucerent. Facile enim animaduertitur, imagines tandem ſic poni, vt in alio Speculo depingere ſe vlterius non poſſint. Hoc tunc contingere docuit L. B. a WOLF (**) quando catheti imaginum loca definientes intra angulum Speculorum verticalem terminantur, hoc eſt imagines ipſae intra hunc angulum cadunt. Hoc, etſi ſatis perſpicuum ſit, et dato quouis caſu particulari, quaeſtioni quot ſint imagines, diagrammate deſcripto reſoluendae ſufficiat, minus tamen idoneum eſt generalibus formulis inueniendis, quibus numerus imaginum ex datis Speculorum et obiecti poſitionibus definiatur. Tales primo quaeſiui, cathetis, imaginem ſecundam, tertiam, cet. determinaturis, ex primae catheto computatis; ſic autem, dum formulis analyticis ſinuum aut tangentium, arcuum ex aliis compoſitorum vtor, immenſis calculis immerſus viam tamen nullam detexi, qua ad leges generales perueniatur; mox vero in faciliorem methodum, et quae leges illas egregie doceat, incidi, angulos contemplatus. Nolui illam inſerere opticae quam edidi (***); tum quia copia rerum maioris momenti, prolixius de hac et ſimilibus differere vetabat, tum quia TRABERI *neruum opticum* prius legendum mihi eſſe exiſtimabam, quem haec vberius perſequutum

(*) Zahn; ocul. artif. teledioptricus Fundam. III. Syntagm. V. cap. IV.
(**) El. Catoptr. Lat. §. 106.
(***) Vollſtändiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755. pag. 476.

tum L. B. a WOLF memorat. Librum poſtquam Collega coniunctiſſimus Cl. LOWICZ benevole mecum communicauit (*); vidi non niſi caſus quosdam particulares auctorem explicaſſe (†), cathetis etiam vſum; et radiis operoſius ductis, vt, cum plures imagines fiunt, magno Schemate opus habuerit (††). Mirum autem eſt, quod vel ex figurarum ſuarum intuitu non obſeruauerit aerumnoſi illius laboris levamen, imagines omnes in circuli peripheria chordarum ope facillime definiri. Angulos quos rectae ab imaginibus ad verticem Speculorum ductae cum Speculis continent, non contemplatus eſt; de generalibus formulis ne cogitavit quidem, et vnicam appellauit imaginem cum

- - - - *miſta duarum*
Corpora iunguntur - - -

licet illis non vna facies inducatur,

Sed duo ſint, et forma duplex.

OVID.

Haec dicenda fuerunt vt conſtaret lectoribus, virum qui in efficiendis machinis opticis et ingenio plurimo polluit et vſu, et poſt cum L. B. a WOLF, in hoc circa quod verſor negotio, non perficienda quaedam, ſed theoriam integram condendam mihi reliquiſſe.

TRACTATIO.

1. *Speculorum* B A, C A, ſuperficies ſpeculares obuertantur obiecto D. intra B A C angulum poſito; Formet igitur obiectum imaginem ſui G in Speculo A C, et haec imago aliam in Speculo ſibi *oppoſito* A B, quae ſit H; et H rurſus aliam I, in Speculo ſibi oppoſito A C, et ſic porro; *Suum* autem Speculum imagini cuivis eſt, in quo ipſa formatur; vt A C, imaginibus G, I; A B, imaginibus H, K.

Quaeritur numerus imaginum quae ſic naſci poſſunt. Notum vero eſt quae de lineis B A, C A, dicuntur, valere etiam de planis Speculorum ipſis B A, C A, inſiſtentium, plano B A C rectorum.

2. Ex catoptricis conſtat ducta a G ad verticem Speculorum A, recta G A, fore G A C = C A D; Dicatur B A C = P, et biſſecto hoc angulo E A recta ſit E A D = p; eſt G A C = $\frac{1}{2}$ P — p.

3. Igitur adſumta G obiecti loco, eius imago H tanto angulo poſt Speculum ſuum ponetur, quanto ponitur G ante idem, ſed ſibi oppoſitum; ſeu eſt H A B = G A B = P + $\frac{1}{2}$ P — p = $\frac{3}{2}$ P — p. Similiter ſi H ſit obiecti loco quod radiet in A C, Speculum, formetque in illo imaginem I, erit I A C = H A C = H A B + B A C = $\frac{5}{2}$ P — p.

4. Imago

(*) Deinde occaſio ſe obtulit alia, librum hunc bibliothecae meae addendi.

(†) L. II. c. 4. 5. f. 90. Sequ.

(††) v. Fig. eius 37. 38.

4. Imago quaeuis vt I, dato angulo *ponatur poſt* ſuum Speculum AC, hoc eſt; recta ab ea ad A ducta, contineat datum angulum cum ſuperficie *poſtica*, non ſpeculari, ſpeculi eius in quo formatur; haec igitur imago, ante Speculum ſibi oppoſitum AB, ponitur angulo, qui eſt angulus ille quem modo dixi, angulo Speculor. auctus; Seu IAB, = IAC + CAB; Ergo ſi imago I obiecti loco ſit, eius imago, eodem angulo poſt ſuum Speculum, hoc eſt poſt illud in quo non formabatur I ponitur: Hinc angulus quo quaelibet imago ponitur poſt ſuum Speculum, eſt angulus; quo ante idem Speculum, ſed ſibi oppoſitum, ponebatur, imago proxime praecedens, a qua ſequens orta eſt, hoc eſt angulus quo haec imago praecedens poſt ſuum Speculum ponebatur, angulo Speculorum auctus. Cum ergo imago prima poſt ſuum Speculum ponatur angulo $\frac{1}{2}$ P — p. (2) pro imagine nta accedent anguli P numero n — 1, *vt illa locetur poſt ſuum Speculum angulo* $\frac{2n-1}{2}$ P — p.

5. Hinc eadem imago *ante Speculum ſibi oppoſitum* ponitur, angulo priori, ipſo P aucto, ſeu $\frac{2n+1}{2}$ P — p; hoc eſt, recta ab imagine ad A ducta, tantum angulum cum ſuperficie ſpeculari ſpeculi oppoſiti continet. Ita pro imaginibus quas figura exhibet eſt ſucceſſiue n = 1, 2, 3, 4, et eodem ordine, angulus de quo dixi, GAB = $\frac{3}{2}$ P — p HAC = $\frac{5}{2}$ P — p, IAB = $\frac{7}{2}$ P — p, KAC = $\frac{9}{2}$ P — p.

6. Imaginis cuiusuis vt I alia imago K ſic naſcitur, vt ab AC Speculo quod imaginem I format, reflexi radii velut ex I diuergentes in AB oppoſitum incidant. Cum igitur rectae per I et Speculi ſui punctum ductae, ea pars ſemper linea geometrica ſit, quae puncto I et Speculo continetur, reliqua pars ſaltim, inde a Speculo producta poſſit radius lucis eſſe, ſequitur, vt haec pars non poſſit reflecti, ſicque reflexa ad nouam ipſius I imaginem pertinere; niſi in progreſſu ſuo ſuperficiem ſpecularem AB offendat. Fingamus I vtcunque formatam eſſe in AC Speculo, cuius ſuperficies ſpecularis puncto D obuertitur; ipſius vero AB ſuperficies ſpecularis fingatur obuerſa non D puncto ſed H puncto verſus ſiniſtram eius qui figuram intuetur: patet radios, quaſi ex I vergerent ab AC exeuntes, non reflecti, quoniam in ipſius AB partem poſticam non ſpecularem incidunt.

Igitur vt imago quaedam poſſit aliam formare, requiritur vt *obuerſae* ſibi ſint ſuperficies ſpeculares, hoc eſt vt ſuperficies ipſae ſpeculares, non partes illarum poſticae angulum duobus rectis minorem contineant. Rectis AB, AC, inſiſtant Speculа ſic, vt ſuperficies ſpecularis ipſius AB verſus ſiniſtram figuram ſpectantis, ipſius AC verſus dextram eius cadat ſeu AB velut Speculum opponatur H puncto, AC, I puncto. Hoc caſu dicam ſuperficies ſpeculares continere angulum duobus rectis maiorem, *gibbum*, vel *conuexum*; cuius menſura eſt arcus BHLG, complementum ad quatuor rectos, acutus BAC; Iam obiectum quomodocunque his ſpeculis oppoſitum,

nullam imaginem format cuius alia, nascatur imago. Productis enim B A, C A in b, c, ponatur obiectum ad dextram rectae C A c, vt in loco I; formabit sui imaginem in A C, quae cadet forte ante A B Speculum, sed in illud radios nullos mittit cum reflexi radii ab A C omnes vergant ad dextram rectae C A C; Similia patent obiecto ad sinistram B A b rectae posito. Praeterea, vnica imago est obiecti intra C A b vel B A c, angulum positi, duae sunt intra c A b positi, vna in quouis Speculo. *Hunc ergo casum anguli gibbi, a sequenti disquisitione plane remoueamus, sed superficies specularis sibi obuersas ponamus, vtrasque in figura ad D punctum spectantes.*

7. *Imago ita sita vt radii ex illa ducti, non occurrant superficiei speculari spe-*
Fig. 2. *culi oppositi, aliam non format.* Huius duo casus sunt

8. I. Obiecti E, aut imaginis cuiusuis Speculo A C oppositi, *imago e, cadat in ipsum A B Speculum;* non poterunt ex *e* radii exire qui ab *A B* reflectantur, cum rectae ab *e* ad A B ductae, nullo angulo ad hoc Speculum inclinentur.

Exempl. Sit B A C = 120° et obiectum E in bissectrice A E, erit E A C = 60 = *e* A C = 180° — B A C, vt *e* cadat in B A productam.

Fig. 1. 9. II. Imago K formata sit in A B Speculo, ab ea in A C nascatur L, ita vero sita, vt rectae ab ea ductae ad Speculi A C puncta sita ab A versus C, non secent A B ad partes B respectu A, sed ipsi B A retro ad partes b productae occurrant; Dico *ab* L *aliam imaginem non orituram;* radii enim ab A C reflexi, ita vt directiones illorum per L transeant, hoc est, imaginem L formantes, non cadunt in A B vbi Speculum est, sed productae A B ad partes b, vbi non est Speculum, occurrunt; igitur denuo non reflectuntur.

10. Scilicet in eo differt imago L a vero obiecto, quod hoc, quaquauersum radios emittat; igitur si in L esset res proprio lumine gaudens, exirent ab ea radii etiam in A B ad partes B; sed tamen, superficie Speculi postica, quae specularis non est, retinerentur, sicque nec huius obiecti lucidi imaginem formarent. Dici poterit hoc casu punctum L *post* Speculum A B situm, quod patet contingere si angulus quem L A continet cum superficie speculari A B, seu angulus L A B, talis quales ante K A C, I A B, cet. accipiebantur, duobus rectis maior, minor autem quatuor rectis fiat hoc est *gibbus*, vt eius mensura sit arcus L I G B.

11. *Pro numero imaginum Cas. 1.* Pone $(2n+1)\cdot\frac{1}{2}P - p = 2R$ (5) habetur $(2n+1) = 4R : P + 2p : P$; Jam ob p dimidio P minorem (2) pars ultima est fractio vera. Ergo pars prior debet esse fractio spuria, ita comparata, vt addita vltimae efficiat integrum imparem. Dic $2p : P = 1 - u$ vnde $p = (1-u)\cdot\frac{1}{2}P$ erit $2n = 4R : P - u$ et $P = 4R : (2n+u)$. Adsumto igitur n integro quouis et u fractione quauis vera, aut vnitate, si $p = o$ dantur p, P, satisfacientia quaesito.

Ex. 1. Sit $u = 1$ est $P = 4R : (2n+1)$. Quotiescunque ergo angulus Speculorum est quatuor rectorum pars aliquota data numero impari $2n+1$ toties obiecti in

anguli

anguli Speculorum biſſectrice poſiti imago *nta* cadit in Speculum quod ipſi oppoſitum eſſe debebat.

Ita in exemplo §. 8. $2n+1=3$ et $n=1$. Sit $P=4R: 9=40°$ eſt $n=4$. Scilicet anguli §. 5. erunt hic graduum 60, 100, 140, 180.

Ex. 2. Poſito $u=\frac{1}{10}$ deſiderentur imagines 7. Eſt $P=4R:(14+\frac{1}{10})=\frac{40}{141}R$. Hinc eſt $p=(1-\frac{1}{10}).\frac{20}{141}.R=\frac{9.2}{141}R$ et imago ſeptima, ante Speculum ſibi oppoſitum ponitur angulo $(15.\frac{20}{141}-\frac{18}{141}).R=2R$.

12. *Hic igitur caſus* (8) *certas ipſorum P et p rationes poſtulat.* Qualescunque vero hi anguli ſint, eueniet aliquando alter, (9) quoniam aucto n, ſemper fiet $(2n+1).\frac{1}{2}P-p$ duobus rectis maior. Imago igitur pro qua hoc prima vice contingit *vltima* eſt, et aliam ſui non format.

13. *Ex.* $P=38°\frac{1}{2}$ $p=8°$, $\frac{1}{2}P=19°\frac{1}{4}$, eſt $GAB=49\frac{3}{4}$, $HAC=88\frac{1}{4}$, $IAB=126\frac{3}{4}$, $KAC=165\frac{1}{4}$, $LAB=203\frac{3}{4}$, intellecto angulo rectae LA cum ſuperficie antica ſiue ſpeculari, vt LAB gibbus euadat: Eius ſupplementum ad 4R eſt angulus ipſius LA cum ſuperficie poſtica ſpeculi $AB=156\frac{1}{4}$.

14. Augeatur gibbus hic LAB repetitis vicibus quantitate P, gyrante recta LA circa A, verſus ſiniſtram ejus qui figuram intuetur: Ita eueniet vt gibbus hic fiat quatuor rectis major, et AL rurſus vergat ex A verſus anteriorem Speculi AB partem ſpecularem. Sed in his rectis AL nullae erunt imagines, quia imago quaeuis lucem omnem quam habet a praecedente accipit, vltima vero (12) aliam nullam illuſtrat.

15. *Inuenire numerum imaginum alias formantium.* Pro quauis tali imagine eſt $(2n+1).\frac{1}{2}P-p$ minor quam 2R; Ergo $2n+1$ minor eſt quam $(4R+2p):P$; integer igitur hoc quotiente proxime minor dicatur Q; iam ſi Q eſt impar, eſt $2n+1=Q$, et $n=\frac{1}{2}.(Q-1)$ ſi vero Q eſt par, erit $2n+1=Q-1$ et $n=\frac{1}{2}.(Q-2)$. ita habebitur numerus imaginum alias formantium, quem vocabo N; omnium vero erit $N+1$ accedente vltima (12).

Ex. 1. In §. 13. $(4R+2p):P=(360+16).2:77.=9,+$ vnde $Q=9$, $N=4$; pro imaginibus G, H, I, K, accedente L.

Ex. 2. Si P non minor eſt recto, erit T (11) non maior quam 4; hinc ob 2p: P, fractum verum, etiam Q non maior eſt quam 4; vnde fit $N=1, =1, =0$, pro $Q=4, =3, =2$, igitur niſi angulus Speculorum acutus ſit, nunquam imago ſecunda tertiam generat.

16. Dicatur $4R:P=T$, et hac T ſit integer; erit $Q=T$ quoties p non eſt $=0$; nec negatiuum; ſed ſi $p=0$ hoc caſu eſt $Q=T-1$; Si p ſit aliquid, et T integer addito fracto vero; hic fractus verus, vero 2p: P iunctus poteſt integrum efficere, vnde hoc, T non integri, caſu et ipſius p ratio habenda eſt.

17. Ob $AG=AD$ ex catoptricis, *erunt imagines omnes in circulo centri A radii AD. Hinc habetur facilis illarum conſtructio.* Deſcribatur hic circulus ſecans Specula in C, B; et illi perpendiculum ex D in AC demiſſum occurrat poſt AC, in G,

vel transferatur chorda DC ex C in G; erit G imago prima; chorda GB transferatur ex B in H, chorda HC vero ex C in I, et sic porro chorda BK fiat = BI, CL = CK, hoc est chorda quaeuis ab imagine ad punctum in quo circulus secatur a Speculo opposito imagini, transferatur ex hoc puncto ad partem posticam Speculi illius, secatura circulum in loco imaginis sequentis.

18. Omnia quae dixi pertinent ad Seriem imaginum quarum origo est G, nata ab obiecto ipso in Speculo Ac. Hanc seriem *primam* appellare liceat. Datur enim *secunda* oritura ab illa imagine, quam format D in AB speculo. Pro hac secunda serie erit DAB = $\frac{1}{2}$ P + p, vt pro prima erat DAC = $\frac{1}{2}$ P − p. Igitur tenebitur eadem formula qua prima, signo saltim ipsius p in oppsitum mutato. Vnde imago eius m ta ponitur ante Speculum sibi oppositum angulo (2m + 1) $\frac{1}{2}$ P + p (s).

19. Pro casu I (8) hic est 2m + 1 = 4R: P − 2p: P. sit v binarius vel fractio spuria illo minor vel vnitas vt v − 1 sit binario minor sed positiuus, vel = o, ponere licebit 2p: P = v − 1 (2) Ergo vt in 11. reperitur P = 4R: (2m + v)

Ex. 1. Si p = o est v = 1 et prodit P = 4R: (2m + 1) vt in (11 Ex. 1.) quia obiecto in bissectrice posito series secunda similis est primae.

Manifestum est fore v = 2p: P + 1 = 2 − u (u) Vnde P = 4R: (2 (m + 1) − u) et (11) 2m + 2 = 2n + 2u.

Haec autem aequatio locum non habet nisi u = 1. Ergo *ambarum Serierum imagines vltimae non incidunt simul in specula quae ipsis opposita esse debebant, nisi obiectum sit in bissectrice. Pro alio quouis obiecti sita reperitur angulus Speculorum efficiens vt alterutrius saltim Seriei imagini vltimae id contingat.*

20. Pro cas. 2. (9) est (2m + 1). $\frac{1}{2}$ P + p, minor quam 2R vnde 2m + 1 minor quam T − 2p: P. Cum pars vltima sit fractio vera; dic integrum ipso T − 2p: P proxime minorem, S, erit S etiam integer ipso T proxime minor, seu T − 1, si T sit integer; vt hoc casu ad p non sit respiciendum. Generatim vero siue T integer sit, siue fractio spuria, hoc tenendum est: si S sit impar, fore 2m + 1 = S, et (S − 1): 2 = m, Si vero S sit par, 2m + 1 = S − 1 et m = (S − 2): 2: ita definitur numerus imaginum alias producentium, qui sit = M, erit numerus, omnium = M + 1.

21. *Ex. 1.* P = 70; p = $\frac{1}{20}$. P = $3\frac{1}{2}$, (vnitas ipsorum P, p nisi per rectum exprimantur, est gradus) erit T = $5\frac{1}{7}$ et 2p: P = $\frac{1}{10}$ Vnde S = 5, M = 2 scilicet anguli quos rectae ab imaginibus ad A ductae, cum Speculis cuiuis imagini oppositis continent, ad partes Speculorum speculares sumti, sunt 1) 3. $35° + 3°\frac{1}{2} = 108°\frac{1}{2}$, 2) $108°\frac{1}{2} + 70° = 178°\frac{1}{2}$; 3) $178°\frac{1}{2} + 70°$; tertius est imaginis vltimae.

Ex. 2. Retento P, sit p = $\frac{1}{4}$ P = $17\frac{1}{2}$, est 2p: P = $\frac{1}{2}$; quod cum subduci debeat ex $5\frac{1}{7}$, erit S = 4, M = 1, scilicet anguli quibus in ex. 1. vsus sum erunt 1) 3. $35° + 17°\frac{1}{2} = 122°\frac{1}{2}$; 2) $122°\frac{1}{2} + 70°$, vt secunda imago iam sit vltima.

Ex. 3.

Ex. 3. In numeris §. 13. vbi $T = 9\frac{2}{7}\frac{7}{7}$ et $2p : P = \frac{3}{7}\frac{2}{7}$ eſt $S = 8$ vnde $M = 3$ ſeu obiecti D quatuor naſcuntur imagines quarum prima formatur a Speculo AB.

22. *Si obiectum D duas diuerſas facies habeat* puta ſi ſit globus dimidia ſuperficiei parte niger, dimidia albus, aut charta luſoria, altera ſui parte picturam gerens, *quae facies ſpeculo AC obuertitur, eam oſtendunt imagines omnes ſeriei primae, ſecundae vero ſeriei omnes, faciem ſpeculo AB obuerſam,* vnde quae imagines ad quamuis feriem pertineant diſtingui poteſt.

23. *Si imagines duae in eamdem rectam per A transeuntem incidant omnino coincident*; omnes enim vtriusque ſeriei imagines aequaliter ab A diſtant (17. 19.). Si diuerſarum ſerierum ſint diſtinguuntur ex 22.

24. *Imago vltima non eſt, niſi quae cadit intra angulum verticalem* cAb *Speculorum* retro productorum. Nam quaeuis imago vt K, ponitur poſt ſuum Speculum, AB; igitur ſi non cadat intra verticalem, cadit intra cAB angulum et ducta ab illa ad verticem recta KA, continebit cum oppoſiti Speculi AC ſuperficie ſpecularí angulum KAC duobus rectis minorem: Ergo radii ab AB ita reflexi quaſi exirent ex K incidunt in AC Speculum, atque ab eo denuo reflectuntur aliam imaginem formaturi. (6)

25. *Imago intra verticalem cAb cadens vt L aliam non format* ponitur enim poſt vtrumque Speculum (9). Erit igitur *vltima* ſi ante illam nulla in verticalem inciderit.

26. *Imagines duae a duobus Speculis formatae, non coeunt niſi intra angulum verticalem Speculorum ſitae ſint.* Imago enim quaeuis poſt ſuum Speculum ponitur; ergo locus coniunctionis imaginum eſt poſt vtrumque Speculum, quod in angulari ſpatio cAb ſaltim contingere poteſt.

27. *Speculo AC opponuntur Seriei primae imagines* 2, 4, 6, 8, ·· *ordine pares, Seriei ſecundae*, 1, 3, 5, - - *ordine impares: Speculo AB; Ser. primae* 1, 3, 5, ··· *impares; ſecundae* 2, 4, 6 ··· *pares.*

28. *Eiusdem Seriei imagines duae non coeunt.* Alias formantium nulla cum vnica vltima (24. 25.) non duae a diuerſis Speculis formatae, quaeuis poſt ſuum Speculum poſita, vt diametris Bb, Cc, ſeiungantur, non eiusdem Speculi, ante alterum Speculum angulis multiplo ipſius P per numerum parem differentibus poſitae. (5. 18.)

29. *Duarum Serierum imagines in eodem Speculo formatae non coeunt.* Opponerentur enim alteri Speculo, non ſuo, iisdem angulis; Ergo eſſet $(2n+1).\frac{1}{2}P - p = (2m+1).\frac{1}{2}P + p$ (5. 18) vnde $(n - m)P = p$. Sed propter p ipſo P minus, n, m, vero integros, hoc contingere nequit niſi $n = m$ et $p = o$ Tunc vero anguli non poſſunt pertinere ad idem Speculum, quia eaedem in ordine imagines, duarum Serierum eidem Speculo non opponuntur (27). Ceterum ſi $p = o$, manifeſtum eſt, obiecto ſimiliter ad ambo Specula ſito easdem ordine imagines opponi, Seriei I Speculo AB, et II. Spec. AC.

30. *Non*

30. *Non coeunt niſi imagines vltimae, quaeuis ſuae Seriei.* Non enim coeunt eiusdem Seriei (28), nec duarum Speculi eiusdem (29); ergo ſi coeunt ſunt ſpeculorum diuerſorum; intra angulum cAb ſitae (26) ultimae (25).

31. *Summa imaginum omnium* eſt N + M + 2 (15. 20) vel vnitate minor, ſi vltima duplex (30. 23) pro vnica computetur.

32. *Numeros hos ſeparatim exhibere conducit pro T integro.* Hic primo ſit p aliquid, eſt Q = T (16) S = T — 1 (20); ſit T par; eſt N = $\frac{1}{2}$. (T — 2) = M (ibid.) vnde N + M + 2 = T. Si T impar, N = $\frac{1}{2}$. (T — 1), M = $\frac{1}{2}$. (T — 3); N + M + 2 = T.

33. Deinde ſit p = o, eſt Q = T — 1 = S, hic pro T pari, N = $\frac{1}{2}$. (T — 2) = M, M + N + 2 = T; pro T impari N = $\frac{1}{2}$ (T — 3) = M, N + M + 2 = T — 1.

34. Pro T pare numerus imaginum Seriei vtriusque idem eſt ſiue p = o ſiue non: Pro T impare, ſi p eſt aliquid, Series prima habet imaginum numerum vnitate maiorem, quam habet ſi p = o; ſecunda vero Series eundem vtroque caſu. Vnde numerus imaginum omnium, ſi T ſit par idem eſt ſiue p = o ſiue non, ſed ſi T ſit impar, vnitate maior eſt quando p eſt aliquid, quam quando p = o. Ceterum *tum ſumma imaginum, tum numerus in ſingulis Seriebus, a varia ipſius p quantitate, ſi T ſit integer non mutatur.* Ipſorum vero M, N, *progreſſio* mutato T eſt *numerorum naturalium;* transeunte enim T per omnes integros fiunt N, M, dimidia omnium pariuin.

35. *Vt coire poſſint imagines in L* (30) gibbus LAB ex Serie prima, = (2n + 1). $\frac{1}{2}$ P — p; et gibbus LAC ex ſer. ſec. = (2m + 1). $\frac{1}{2}$ P + p. (5. 18) ſuntque, ob imagines vltimas in L, n = N + 1, m = M + 1 (15. 20); Ex gibbo autem LAC, ablato BAC, relinquitur qui duobus rectis minor eſt LAB, gibbi LAB ſupplementum ad 4 R. Vnde (2m + 1). $\frac{1}{2}$ P + p — P + (2n + 1). $\frac{1}{2}$ P — p = 4 R vnde m + n = 4 R: P = T. *et coitus non contingit niſi T integro.* Iam imagines coeuntes diuerſis Speculis opponuntur (30) igitur m., n., ſimul ſunt vel pares, vel impares (27) ergo ſumma illorum ſemper eſt par. *Non ergo locum habet coitus ſi T eſt impar.* Si vero T eſt par ſiue p ſit aliquid ſiue = o, eſt n = N + 1 = $\frac{1}{2}$ T = M + 1 = m (32. 33) et illorum ſumma = T. Vnde *ſumto T pare, ſemper coeunt imagines vltimae,* vt ſumma illarum ſit T — 1 ſi vltima duplex ſemel numeretur (31).

36. Sector circuli anguli 4 R: T poſito T pare, inter Specula eumdem angulum continentia poſitus, imagines tot habebit quot ſectores aequales ipſi ad circulum complendum deſunt (35) ſicque integrum circulum oſtendet, quod uſui eſt ad fortalitiorum regularium formas integras ſpectandas, ſi ſector fortalitii hoc modo Speculis interponatur.

37. Exempla conſultum eſt in tabulas coniicere. Summa imaginum omnium ſeu M + N + 2 dicitur S, ſi vltimae coeunt, duplex duarum loco eſt. Vnitas ipſius P, gradus.

I. T par; p vel aliquid vel = o, M = N (35)

T	2	4	6	8	10	12	14	20
P	180	90	60	45	36	30	$25\frac{5}{7}$	18
N	0	1	2	3	4	5	6	9
S	2	4	6	8	10	12	14	20

II. T impar; p non = o ceterum indefinitum reſpondentes ſibi habet N, S, M, ſed p = o, poſitis T, P, iisdem, reſpondentes ſibi habet (N) (S) (M) et eſt M = N — 1, ſed (M) = (N) (34)

T	3	5	7	9	27
P	120	72	$51\frac{3}{7}$	40	$13\frac{1}{3}$
N	1	2	3	4	13
S	3	5	7	9	27
(N)	0	1	2	3	12
(S)	2	4	6	8	26

38. Tabulae I. caſus N = o abſurdum praebere videtur, duas indicando imagines, cum Speculis in idem planum cadentibus ſit vnica. Sunt autem duae coeuntes ob T parem (35) faciebus non diſtinctae, quia eamdem faciem obiectum vtrique Speculo obuertit.

39. *In caſibus Tabularum* (37) *quaeratur rectae LA vel eius productae AQ,* Fig. 4. *poſitio ad Specula.*

I. In Tab. I. AQ eſt eadem pro L duplici (35) et gibbus quo vltima imago ſeriei primae, ſpeculo ei in quo non formata eſt opponitur ſeu (2n+1). $\frac{1}{2}$ P — p, poſito n = N + 1 = $\frac{1}{2}$ T = 2R: P (35) erit 2R + $\frac{1}{2}$ P — p et adeo rectae AQ angulus cum hoc ſpeculo = $\frac{1}{2}$ P — p = QAC in caſu N imparis, = QAB in caſu N paris (27). Vnde *in caſu N imparis, imago vltima duplex eſt in DA producta* (2) *in caſu N paris, in recta ad CA eodem angulo quo DA, ſed ad alteras partes inclinata.*

II. In Tab. II. Si L Fig. 4. ſit vltima Ser. I. l Ser. II. gibbus quo L Speculo in quo non formata eſt opponitur, ſeu (2n+1). $\frac{1}{2}$ P — p poſito N = $\frac{1}{2}$ (T — 1) (32) fit 2R + P — p vnde P — p = QAC vel QAB prouti N impar vel par (27) ſimiliter pro l Seriei II, oppoſito eidem Speculo ac L (27) (2m+1). $\frac{1}{2}$ P + p poſito m = M + 1 = N (37) fit 2R + p vt p = qAC vel qAB prouti N impar vel par. *Semper igitur rectarum AQ, Aq, vna ad vnum Speculum eodem angulo inclinatur quo altera ad alterum,* et *angulus cuiusuis rectae cum Speculo ſibi proxime eſt = p cum remotiore = P — p.*

Hinc facile intelligitur quomodo eadem quaeſtio in aliis caſibus ſoluenda ſit.

Fig. 3. 40. *Sint tria Specula* CA, AB, BF, obiectum D in Speculis CA, AB, formabit duas Series quas huc vsque contemplatus sum: In Speculis AB, BF, vero, similiter duae Series orientur, quarum eius quae incipit a Speculo AB, prima imago eadem est cum prima imagine Serierum ab AC, AB natarum eius quae in AB Speculo incipit. Similiter quaeuis imago serierum ab AC, AB natarum, potest sumi obiecti loco, Speculis AB, BF, interpositi, sicque imagines ab illa oriundae possunt computari; idem fieri potest cum imagine ex seriebus ab AB, BF natis, ad Specula BA, AC, relata. Haec indicasse et sic viam ad plura Specula progrediendi monstrasse sufficiat. Generalia adserta hic inueniri posse, ea qua vsus sum methodo; ob multiplicitatem casuum, imagines forte coeuntes, situm cuiusuis imaginis ad Speculum tertium, operosius definiendum, et similes difficultates vix crediderim (*). Mihi certe illa inuestigare volupe non est. Quomodo plura Specula coniungenda sint, vt obiectum mediante reflexione a quouis Speculo in proxime sequens videatur, docet *Catoptrica* quae sub EUCLIDIS nomine ad nos peruenit Theor. 14.

41. Quaestioni de duobus Speculi respondendi alia est methodus, vt inuestigetur quot reflexiones vnius radii fieri inter illa possint. In hanc inquirens, reperi, quod praeuideri facile poterat, tot reflexiones fieri, quot imagines priori methodo detegun-tur. Obiter autem consideranti, secunda methodus prolixior et varietate casuum magis impedita visa est, cuius adserti fidem faciunt Traberi, illa interdum vsi diagrammata, linearum multitudine obscurata. Praeterea nihil illam docere posse quod prior non doceat vel ex eo patet, quod reflexi omnes ab imaginibus diuergant. Quaeratur
Fig. 1. quibus reflexis oculus O videat K. Eorum vltimus erit VO; iuncta VI secabit speculum AC in puncto, a quo missus in AB radius iuxta VO reflectebatur: Rursus ab hoc Speculi AC puncto ducta recta ad H, secabit AB in puncto a quo missus in AC radius, ab AC in AB mittebatur ab AB iuxta VO reflectendus. Punctum autem Speculi AB modo inuentum si ipsi G iungatur dabit Speculi AC punctum in quod incidens ex G radius, omnibus his reflexionibus ad O delatus est.

42. Huc vsque definiui quot imagines *formentur:* Quaeri autem adhuc posset an omnes *simul videantur;* forte enim datum positione oculum, a quibusdam saltim diuergentes radii intrant, non ab omnibus. Hac de re quid statuendum sit, sic intelligitur.

Cum ab obiecto D in omnia puncta Speculi AC radii incidant ab omnibus etiam Speculi punctis exibunt reflexi radii, a G diuergentes. Ergo oculus vbicunque ante Specu-

(*) Quo apte vsus est auctor poëmatis *L'Entresol; Mercure de France Octobre* 1756. p. 20.

Mais, l'industrie, en fascinant la vuë
De mes reduits, savamment disposés
En a d'abord augmenté l'etenduë,
Ces reflêts lumineux, l'un à l'autre opposés
Par qui Venise fût autres fois si celêbre
En multipliant les objêts
Epuiseroient jé crois l'Algêbre
A calculer ses merveilleux effêts.

Speculum HC positus, ope alicuius radiorum horum videbit G. Intelligitur vero si AZ sit integra longitudo Speculi, oculum poni debere ad partes A respectu rectae GZ nam GZ erit positio vltimi radii a Speculo reflexi. Hinc si Z cadat inter A et C, seu Speculum breuius sit semidiametro AC hoc est AD recta; oculus propior esse debet A puncto, initio Speculi, quam obiectum. Accedente Speculo AB, per se patet oculum intra angulum Speculorum poni debere, non post AB, radios illi intercepturum. Porro dico nullum Speculi AB punctum fore in quod non incidat radius ab AB reflexus, a G diuergens. Nullum enim est punctum semidiametri AB, per quod ducta ad G recta non secet AC, recta vero omnis per G secans AC, radius reflexus est a G diuergens. Ita Speculum totum AB radiis a G diuergentibus repletur; repleretur adhuc, etsi longius esset semidiametro AB, productum scilicet vsque ad occursum rectae GZ. Radii igitur, velut a G ad omnia Speculi AB puncta emissi ab omnibus his punctis ex H diuergentes mittuntur, et si Speculum AB habet longitudinem, ab A vsque ad occursum cum GZ producta extensam oculus intra Specula positus videbit imaginem H, si ponatur ad partes A respectu rectae per H et occursum illum transeuntis. Ita vero patet, haec adeo a Speculorum longitudine pendere, vt illa non definita certi quidpiam dici non possit.

43. Sumamus igitur Speculorum longitudines AB = AC = AD, et ostendetur, *si oculus*, O, *dato loco intra Specula positus, videat quotamcunque obiecti D imaginem K, videre etiam posse, puncti cuiusuis in recta DA, inter D et A siti imaginem eamdem in ordine.* Descripto enim circa A per punctum illud circulo, Speculorum partes refecturo; puncti imago per has partes ita dabitur, vt ipsius D imago per integra Specula; igitur puncti imago in AK recta aeque distat ab A ac punctum ipsum in AD. Vnde Seriei punctorum in DA sumendorum, imago est Series punctorum in KA; Jam si oculus videt K; secabit KO Speculum AB ad partes B ipsius A, in V puncto reflexionis eius radii cuius ope videtur K; igitur erit AK basis trianguli AOK cuius vertex est oculus, Speculi autem AB pars intra hoc triangulum sita ab A ad KO pertingit. Quaecunque igitur recta a basi ad verticem ducitur secat Speculum; igitur si iuxta rectae huius directionem, radius a Speculo ad oculum vergit, videbit oculus, in eo baseos puncto, imaginem, puncti inter D et A siti.

44. *A singulis punctis Speculi in quo formata est imago quaeuis, radii quasi ab imagine illa manantes mittuntur.* Sit K imago n ta; cum per singula puncta Speculi AB in quo formata est, rectae duci ab ea possint, sit inter has rectas aliqua, iuxta quam radius nullus lucis a K diuergat: Ergo in illud Speculi punctum, radius nullus velut ex (n — 1) ta imagine I vergens, ab AC speculo missus est: Ergo cum per omnia ipsius AC puncta, rectae ex I duci possint, in aliquod illorum radius nullus, velut ab (n — 2) da imagine H vergens ab AB missus est. Ita progrediendo, a quauis imagine ad proxime praecedentem, cogitur ex adsumto, ad aliquod Speculi AB punctum, radium nullum ab AC, velut a prima imagine G vergentem, missum

 esse,

eſſe, hoc eſt, reflexos ab AC radios velut a G vergentes, AB non replere. Replent autem (43). Ergo adſumtum falſum eſt.

45. Si per imaginem K, ad oculum vbicunque ſitum, ducta KO, ſecet Speculum AB ad partes B reſpectu A puncti (9) portio eius VO, Speculo et oculo interiecta, reuera eſt radius lucis (44). Hoc autem valet etiam de recta ad oculum ducta ab imagine inter A et K ſita, puncti inter D et A° ſiti, quia longitudo DA quaelibet eſſe poteſt: Omnis vero talis recta ſecat Speculum ad partes B reſpectu A (43). Igitur *oculus videns K*, accipit lucem ab omnibus rectae AK punctis, et reuera videt integram rectae DA imaginem KA.

46. Ducta recta GC ab imagine prima G ad Speculi ſui extremum C, eſt $AGC = ACG = R - \frac{1}{2} CAG = R - \frac{1}{2}.(\frac{1}{2}P - p) = R - \frac{1}{4}P + \frac{1}{2}p$; Item ducta HB, eſt $HBA = R - \frac{1}{2} HAB = R - \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}p$; et in genere ab imagine n ta ducta recta ad Speculi ſui extremum, inclinatur ad Speculi huius partem ab extremo verſus A extenſam angulo $R - \left(\frac{2n-1}{4}\right).P + \frac{1}{2}p$ (4) Item pro Serie II. eſt hic angulus $= R - \left(\frac{2m-1}{4}\right).P - \frac{1}{2}p$ (18); Eſt vero quod in his formulis a recto ſubducitur, ipſo recto minus, pro imaginibus alia formantibus (15-20.) pro his igitur, formulae poſitiuos valores exhibent; ſequens autem imago, angulum talem minorem dat angulo praecedentis, nam quod ſubducitur, creſcentibus n et m creſcit, vnde anguli ſemper fiunt acutiores, contigui vero illorum, vt TCA, TBA, quos, rectae ab imaginibus ad extrema Speculorum, productae, cum Speculis BA, CA continent, obtuſiores. Igitur rectis GC, HB, occurrentibus ſibi in T, oculus ad partes A reſpectu rectarum BT, GT, poſitus, ponetur ad partes A, reſpectu rectarum a ſequentibus eius Seriei imaginibus eodem modo ad B vel C ductarum; Nam per hyp. rectae ab oculo ad B, C, ductae cadunt intra obtuſos angulos TCA, TBA, quos GC, HB, productae cum Speculis continent ergo a fortiori inter angulos obtuſiores.

47. Oculus O, vbicunque intra ſpatium ABTG (40) poſitus, et adeo *videns primas duas ſeriei cuiusdam imagines G, H, videt reliquas quae alias formant omnes.* Sit alias formantium vna K; quoniam KB producta cum AB obtuſiorem angulum ipſo ABT continet, (46) ſequitur vt KO ſecet AB ad partes A reſpectu B puncti. Porro ob KAC duobus rectis minorem, cadit KA producta extra angulum Speculorum BAC; ergo ſumto puncto ad eas ipſius KA partes, ad quas ſita ſunt B, C, per illud et K tranſiens recta in infinitum producta, ſecat AB ad partes B reſpectu A, niſi ipſi AB parallela ſit. Jam O eſt tale punctum. Ergo KO per oſtenſa ſecat AB inter A et B; ſecet in V, erit VO radius lucis (44) ergo oculus videt K.

48. *Idem*

48. *Idem oculus non videt imaginem vltimam L, niſi ponatur intra angulum quem LA producta cum Speculo AC in quo format L continet, tunc autem videt.* LA producta cadit intra BAC angulum (25) quodſi igitur oculus non ponatur intra angulum ab LA producta et AC contentum, nulla recta ex L ducta, Speculum AC ſecans ad partes C reſpectu A, tranſit per oculum, igitur a nullo Speculi AC puncto radius velut ab L vergens ad oculum reflectitur. Si vero O ſit intra illum angulum, datur talis recta per O tranſiens, radius lucis quaſi ab L vergens (44). Fig. 4.

49. Sic patet *oculum intra ſpatium* ABTC *ſemper ita poni poſſe, vt primae Seriei imagines omnes videat;* ſcilicet ſi ſit intra huius ſpatii partem eam quae continetur cruribus anguli CAQ quodſi vltima imago L formetur in AC.

50. Si l ſit vltima imago Seriei II. et ſimiliter ducatur Aq, a primis autem duabus eius ſeriei imaginibus g et h, per B et C ducantur rectae Bt, Ct eodem modo definietur ſpatium, *intra quod conſtitutus oculus videt omnes imagines Ser. II.* Fig. 1.

51. *Vt videat omnes omnino imagines conſtitui debet, in parte duobus ſpatiis* (49. 50.) *communi,* ABWC *et ſimul intra angulos rectarum* AQ, Aq, *cum Speculis imaginum vltimarum.*

52. Figurae ABWC cognoſcendae inſeruit, inueſtigare ex §. 46. angulos $ACT = R + \frac{1}{4} P \frac{1}{2} p$, $ABT = R + \frac{3}{4} P - \frac{1}{2} p$, $ACt = R + \frac{3}{4} P - \frac{1}{2} p$, $ABt = R + \frac{1}{4} P + \frac{1}{2} p$, vbi manifeſto eſt ACt maior ipſo ACT, et ob $\frac{1}{2} p$ minorem $\frac{1}{4} P$, ABT maior ipſo ABt; praeterea $TBt = \frac{1}{2} P - p$, $TCt = \frac{1}{2} P + p$, vt ſi $p = o$ hi anguli et adeo ipſi T, t, ſint aequales.

53. *Ex. 1.* In Tab. II. §. 37. L, l, opponentur ipſi AB; eſt N par (27) et qAC $= P - p$ (39. 11) ipſo QAC $= p$ (ibid.) maior (2) intra hunc ergo minorem conſtitutus eſſe debet oculus, vt imagines omnes videat. Haec Traberus Neru. Opt. L. II. c. 5. Pr. 5. de caſu particulari anguli 72° indicauit, nulla demonſtratione munita, et hinc rarius tot imagines quot conſpici ad ſummum poſſunt videri adſeruit.

Ex. 2. Si T eſt impar, $p = o$ (11), oculus vbicunque intra BAC angulum videbit imaginem cuiusuis ſeriei vltimam vt e Fig. 2. et adeo omnes.

Ex. 3. In Tab. I. §. 37. duplicis imaginis vltimae (35) faciem vtramque ſimul non videt oculus niſi in recta per locum duplicis imaginis et A, producta ponatur; In hac autem proprie nullam imaginem videbit, in vtriusque plano ſitus, vt Saturni annulus terricolis in eius plano poſitis diſparet: paullisper autem a recta hac declinans vnam poſt aliam ſpectabit.

L. B. a WOLF Cat. Lat. §. 104. operoſe oſtendit, tranſire AQ per D, ſi BAC ſit rectus, quod eſt caſus particularis exempli I. (39). Idem nec duplicem agnouit imaginem, ſed tres appellat, quarum duae coeunt, nec ſatis feliciter rationem reddit, cur tertia quam vocat imago, oculo in AD poſito diſpareat. Radium ait nullum ad hunc oculum reflecti, quod non vincit pars demonſtrationis, ad quam prouocat idque ipſum refellit, rectam LA ab imagine ductam per D tranſire. Hoc patet: ſi ab

imagine vltima ire debeat reflexus AD, incidentem fuiſſe DA, reflexiones etiam quibus mediantibus effectum eſt, vt ex vltima imagine juxta AD vergat in ipſo velut A puncto contigiſſe, quod, dummodo Speculum vtrumque ad A pertingat, particulam Speculi cuiusuis infinite paruam ipſi A proximam cogitando, abſurdi nihil habere intelligitur. Hae autem particulae, vel eam ob cauſſam cogitandae ſunt, quoniam reflexio nullibi fit a puncto, ad quod nulla eſt radii incidentis poſitio, ſed vbique ab elemento Speculi per incidentiae punctum transeunte. Id quomodo in curuis Speculis accipiendum ſit, ne in errorem nos inducat oſtendi in optice (*) ſupra citata.

III.

De minimo in reflexione a curuis.

d. 22. April. 1758.

Qui rerum naturam ſcrutati ſunt, inter tot documenta, infiniti auctoris opus eſſe, hoc etiam ſuſpexere, quod euentus omnes ſimpliciſſimis ex cauſſis et ad eos producendos maxime idoneis oriantur; viresque omnes ita agant, vt quod ſummum ab iis effici poteſt efficiatur, vniuerſi vero oeconomia, diuitiarum maximarum, prudentiſſime adminiſtratarum, inimitabile ſit exemplar. Hinc illa vulgata inter philoſophos adſerta: Deum et naturam nihil fruſtra facere, omniaque viis breuiſſimis expedire; denique parſimoniae lex, quam iis qui vires motusque calculo ſubiiciunt ſuaſit nuper ill. de Maupertuis; Sed eam aliqui ita exceperunt, vt olim populus Rom. legem, non inutilem, a magiſtratu vero cui infenſus eſſet rogatam, turbaeque natae ſunt inter mathematicos, et auctae ab ipſis poetis, ad quos, parſimonia quomodo pertineat, nemo intelligeret, niſi is controuerſiae huic ſe immiſcuiſſet, qui ſolus fere inter filios Apollinis auarus praedicatur.

Eſt tamen inter indubia, quae legi minimi illuſtrandae dom. de Maupertuis protulit exempla, antiquis jam obſeruatum, quod in reflexione a Speculo plano facta contingit. Quodſi enim data poſitione ſint, oculus; punctum radians et Speculum planum, facile oſtenditur, lineas duas quasuis, quarum vna a puncto radiante ad Speculi quendam locum, altera hinc ad oculum ducitur, tunc minimam ſummam efficere, cum aequales ad Speculum angulos efficiunt, hoc eſt cum illarum altera, incidens radius eſt, altera reflexus, vt inter omnes vias quae a puncto radiante ad Speculum et ab hoc retro ad oculum dantur, lux breuiſſimam eligat.

Hoc theoremate olim cognito vſus eſt Leibnitius in actis eruditorum Lipſienſibus (**) vt naturam reflexionis illuſtraret, illudque, mutationibus idoneis additis ad refra-

(*) Lib. I. §. 19. not. d.

(**) 1682; p. 185.

refractiones transtulit. Magnus vero inter Anglos geometra Robertus Smith in abſoluto optices ſyſtemate quod edidit, reprehendit Leibnitium, quaſi illud de via breuiſſima adſertum, praecipitanter nimis ad curua ſpecula transtuliſſet. Haec fere eius verba ſunt latine reddita (*): „Si quam minimum ſaltim vltra reperta antiquorum „progreſſus fuiſſet Leibnitius, principiumque hoc cauis et conuexis ſpeculis vt pro„miſerat applicaſſet facile percepturus erat, inſufficiens eſſe, et radium multas alias „vias praeter breuiſſimam ſequi.“ Hanc cenſuram Anglus vt exemplo confirmet, intra circulum oſtendit, duo puncta a diametro aequidiſtantia ſic ſumi poſſe, vt quatuor perimetri loca, radium ex vno punctorum incidentem ad alterum reflectant, has autem vias ſingulas breuiſſimas eſſe non poſſe.

Cum de optica germanica edenda cogitans, Smithii libro vterer, non potui non hoc eius adſertum examinare, vtarque hac occaſione, vt ſocietati regiae quae reperi exponam.

In ſerie quantitatum continuo variantium, norunt geometrae, illam maximam vel minimam eſſe; cuius decrementum aut incrementum, ex lege ſeriei definitum euaneſcit, hoc eſt, infinities minus eſt, decremento aut incremento alius cuiusuis quantitatis eiusdem ſeriei. Hoc autem charactere ad ſummam incidentis et reflexi radii applicato, facile oſtenditur, eam minimam aut maximam eſſe inter omnes ſummas linearum a dato puncto quemuis curuae locum, et hinc retro ad aliud datum punctum ductarum. Quodſi enim duos proximos incidentes ex vno puncto radios cogitemus, et qui ad eos pertinent ad alterum reflexos, quantum incidentium ſecundus creuit, tantum ſecundus reflexus decreuit. Igitur huius via inter omnes vias a dato puncto ad curuam, et hinc retro ad datum punctum, ſemper vel minima eſt vel maxima, haec enim duo plurimis in caſibus aequipollere ſibi, mathematici norunt.

Erat autem Smithii exemplum accuratius conſiderandum, vt intelligeretur quid in hunc errorem illum induxerit. Et primo quidem nulla plane vis ineſt huic ratiocinio: ſi plures ſunt reflexionis viae, ſingulas minimas eſſe non poſſe, cum innumera dentur exempla quantitatum communi quadam lege variabilium, quae iteratis vicibus ad minimas decreſcant et hinc rurſus creſcant. Si vero minimis his interiecta maxima etiam vt dixi pro viis reflexionis accipere liceat adhuc efficacius dubitatio haec tollitur.

Isque caſus eſt exempli a Smithio adducti. Cum enim perſpicuum ſit, datis duobus punctis a circuli quadam diametro aequi diſtantibus; duo illa loca in quibus diameter perimetrum ſecat ita eſſe comparata, vt in quoduis incidens ab vno datorum punctum radius ad alterum punctum reflectatur, Smithius conſtructione ſua, alia adhuc duo perimetri loca quae idem efficiant definit: Ad haec vero loca, reperio viam incidentis et reflexi radii minimam eſſe, ad duo illa quae ante dixi maximam, etſi harum

(*) A compleat ſyſtem of Optiks; by Robert Smith (Cambridge 1738) remark 418.

harum viarum maximarum vna alteri non ſit aequalis, vt igitur illo ipſo exemplo quo Smithius euerti Leibnitii adſerta dixerat, illa poſſint illuſtrari.

Ne quis tamen crediderit, haec, quibus adſenſum extorquere a quouis in geometrico puluere verſato poſſum, nimio in Leibnitium, ſtudio dici. Equidem fauere quantum licet viro eadem in vrbe nato; eadem a regione ſuſcepto, excuſabile forte eſſet in me vitium, ſi vitium eſſet, etiamſi de illo germania vniuerſa non gloriaretur; Hic autem a ſuſpicione omni eo magis liber ero, cum fatear, totam hanc minimi theoriam, alienam omnino ab eo vſu ad quem adplicatur mihi videri. Sapientiam in operibus naturae conſpicuam, admiratus eſt Leibnitius, quod lux iuxta viam breuiſſimam reflectatur. Haec ſi adeo ſapienter ad ſpeculum planum ordinata ſunt, quid de curuo dicemus, vbi via haec, vt in Smithii exemplo duabus vicibus minima, duabus maxima eſt? igitur breuiſſima via quatenus breuiſſima eſt, ſapientiam non probat, nemo enim conceſſerit longiſſimam eius contrarium oſtendere. Vtique, quod alterutra ſit via reflexionis, id perſpicuum reddit, non fortuitam eſſe, ſed certo conſilio electam, huius autem conſilii momenta, ignorare malim quam talia fingere, quibus dimidia euentuum pars contradicat.

Haec quatenus ad generaliora dom. de Maupertuis adſerta pertineant, ii facile iudicabunt, qui norunt et hic maxima cum minimis alternare. Ergo in vniuerſum minima ad ſapientiam pertinere non poſſunt, etſi facile concedam, in iis caſibus vbi locum habent, eo pertinere, in reliquis maxima ſapientius eſſe praelata. Sed haec incredulo nemo mathematicus aut metaphyſicus perſuadeat. Igitur ab ancipiti argumento abſtineri rectius crediderim; minusque ambigua ſapientiae diuinae documenta quaeri; quorum innumera vel iam euidenter agnoſcimus, cum hoc antro platonico coerciti, oculis obuolitanter videmus vmbras veri illius vniuerſi, in quo olim, puriore luce perfuſi rerum omnium auctorem venerabimur.

Quae in praecedentibus ſummatim indicantur ita poſſunt accuratius explicari:

Prop. I.

Fig. 1. A curuae KML, loco M, incidens radius PM, reflectatur iuxta MO, dico eſſe PM + MO, minimam vel maximam.

Dem. Ducta tangente AMmB vbi Mm eſt elementum curuae, erit OMB = PMA, ducantur Pm, mO, et radiis Pm, Om, deſcribantur arcus circulares mT, mt, erunt aequales verticales PMA = mMT, Ergo mMT = BMO ſeu mMt; Igitur aequalia ſunt triangula mTM, mtM, rectangula ad T, t, et latus mM commune habentia. Igitur MT = Mt, ſeu Pm − PM = OM − Om, vnde differentiale ipſius PM + OM, ad hunc locum euaneſcit, eſtque PM + OM maximum vel minimum.

Schol. Ex dictis facile colligitur, ſi incidens quiuis ex P in curuam radius reflectatur ad O, eſſe PM + MO conſtantem, adeoque curuam ellipſin, et contra; Si P, O,

P, O, ſint faci ellipſeos, ita, vt ſit PM + MO conſtans, eſſe has rectas, incidentem radium et reflexum, quae facile ad reliquas coni ſectiones transferuntur. Haec, cum non ſint huius loci, obiter indicaſſe ſufficiat, quoniam video quosdam, calculo ſatis prolixo, demonſtraſſe illam ellipſeos proprietatem, vnde faci dicti ſunt.

Prop. II.

Circa diametrum AB, centro C deſcriptus ſit circulus, ſumatur vero in CB producta, D vt lubet, et diametro DC deſcribatur alius circulus, priorem ſecans in E, F; Huius autem ſecundi circuli, inde a C, ſumantur arcus CG = CH; Dic: a G exeuntes radios ad A, E, B, F, ſingulos ad H reflecti. Fig. 2.

Dem. De radiis ad A, B, vergentibus res manifeſta eſt, cum diameter AB, biſſecet angulos GAH, BAH.

Anguli vero GEC, CEH, ſunt anguli ad peripheriam ſecundi circuli, inſiſtentes eius arcubus aequalibus, CG, CH, igitur aequales. Idem oſtenditur ad F punctum.

Hoc exemplo Smithius vtitur. Quod enim trium ſummarum, GA + AH; GM + MH, GB + BH, nulla alteri aequalis ſit, ea re oſtendiſſe ſibi videtur, viam radiorum in reflexione non eſſe minimam. Quo de adſerto, quid ſtatuendum ſit, efficietur propoſitione ſequenti.

Prop. III.

Diametro AB, centro C deſcriptus ſit circulus. Sit GH diametro perpendicularis per Q, et QG = QH; ad M punctum peripheriae ducantur GM, HM, quaeritur vbi M ſitum eſſe debeat, vt ſiat GM + MH maxima vel minima? Fig. 3.

Sol. 1. Dic radium circuli = a; CQ = b; QG = QH = e; et ducta MSN perpendiculari in AB, dic MS = y; QS = z; erit $b^2+2bz+z^2+y^2=a^2$

2) $GM^2 = QS^2 + (MS - e)^2 = z^2 + y^2 - 2ey + e^2$

3) $HM^2 = z^2 + y^2 + 2ey + e^2$

4) Vt igitur habeatur pro GM + HM, maxima vel minima, dGM + dHM = 0; fiat ex 2; 3;

$$dGM = \frac{z\,dz + (y-e)\,dy}{GM}; \quad dHM = \frac{z\,dz + (y+e)\,dy}{HM}$$

Sed ex (1) eſt (b+z). dz + y dy = 0; Valorem ipſius z hinc repertum ſubſtituendo in differentialia, ipſarum GM, HM, et, quod prodit additis differentialibus, ponendo = 0; habetur

$$\frac{by - e.\,(b+z)}{GM} + \frac{by + e.\,(b+z)}{HM} = 0.$$

Seu $(by - e.\,(b+z)).\,HM = -(by + e.\,(b+z)).\,GM.$

5) In 2; 3; ponatur breuitatis cauſſa; $z^2 + y^2 + e^2 = v^2$ vt ſit

$GM^2 = v^2 - 2ey$, $HM^2 = v^2 + 2ey$

quos valores adhibendo, aequatio vltima (4) fit

$$(by - e.(b+z)).\sqrt{(v^2+2ey)} = -(by+e.(b+z)).\sqrt{(v^2-2ey)}$$

6. Quadrando vtrinque et reducendo, fit $b^2y^2+e^2.(b+z)^2 = (b+z).bv^2$

7. Eliminando v (5) habetur

$$e^2bz - bzy^2 + (e^2-b^2).z^2 - bz^3 = 0.$$

8. Diuidendo per z, et eliminando y (2) reperitur

$$z = \frac{(a^2-b^2-e^2).b}{b^2+e^2} = \frac{a^2b}{b^2+e^2} - b$$

$$\text{et } z+b = CS = \frac{a^2b}{b^2+e^2}$$

9. Maxima aut minima, tot sunt, quod modis satisfit aequationi (5). Pone $y=0$; fit illa $-e.(b+z).v = -e.(b+z)v$; Itaque conditio $y=0$; dat maximum aut minimum. Tunc $v=\sqrt{(e^2+z^2)}$ et $b+z = \pm a$ (1) hoc est, CS est vel CB vel CA. Igitur reflexiones, prima et tertia Prop. II; dant maximum aut minimum.

10. Aequationi (7) satisfacit $z=0$; Quo valore adhibito in (5) fit $\sqrt{(v^2 \mp ey)} = y \mp e$ et aequationis (5) pars sinistra $(by-eb).(y+e)$ pars dextra $-(by+eb).(y-e)$ hae duae partes aequales esse non possunt, non enim est $(y-e).(y+e) = -(y+e).(y-e)$. Ergo valor $z=0$ non satisfacit aequationi (5); satisfaceret illi si pars dextra loco signi — praefixum haberet +.

11. Scilicet, ad aequationem (7) pervenimus, quadrando partes duas aequationis (5). Partis autem dextimae idem quadratum est. Siue pars ea praefixum habeat — siue +. Ergo aequatio (7) praeter eam (5) aliam continet, in qua pars dextra, cui in (5) praefixum est —, haberet +. Talis autem aequatio, non satisfaceret conditioni maximi vel minimi; Ad hanc ergo aequationem pertinet $z=0$ quod non dat maximum vel minimum.

12. Superest ergo, vt valor ipsius z in (8) repertus, satisfaciat aequationi (5) et det maximum vel minimum.

13. Manifestum vero est, esse $GA+AH > GB+BH$. Igitur $GM+MH$ est minimum, interiectum duobus maximis, ita vt sumto V vtcunque inter A et M, sit $GV+VH$ Q $GA+AH$ et sic, dum progreditur V versus M, decrescat $GV+VH$, et fiat minimum cadente V in M; inter M et B summa harum rectarum rursus crescat, fiatque maximum in B, deinde rursus decrescat vsque ad N, et iterum crescat ab N ad A.

14. Notatu dignum est, quod (10) docet, si ex aequatione aliqua reperiatur incognita eleuando ad potentias, prodire posse aequationem, cui satisfaciunt quantitates, quae non sint incognita quae quaeritur. Tale quid se mihi etiam obtulit, in problemate crepusculi minimi, de quo dixi in versione mea geographiae mathematicae ac physi-

phyſicae dom. Lulofs. *(Lulofs Einleitung zur math. und phyſ. Kenntniß der Erdkugel II. Th. 5. Hauptſt.)*

Prop. IIII.

In Fig. 2. Prop. II. ſint AC, CQ, QG, QH, eaedem ae in Fig. 3. Prop. III. Sit EK perpendicularis in AB, quaeritur CK?

Sol. Ex natura circuli, $QD = \frac{QG^2}{CQ} = \frac{e^2}{b}$ vnde ſecundi circuli diameter $CD = \frac{b^2 + e^2.}{b}$ Igitur in illo, $EK^2 = CK.\ KD = \frac{b^2 + e^2}{b}.\ CK - CK^2$; Sed in circulo primo $EK^2 = a^2 - CK^2$. Quae duo quadrata aequando, habetur

$$CK = \frac{a^2 b}{b^2 + e^2} = CS \text{ Prop. III.}$$

Corollarium generale.

Puncta E, F, fig. 2. eadem ſunt cum punctis M, N, fig. 3. et via reflexionis GE + EH, eſt minima, reliquae duae per A et B ſunt maximae. Eam vero viam minimam, indicauit Smithius, vt contra Leibnitium oſtenderet, reflexionis viam non ſemper eſſe minimam.

IIII.

Separatio indeterminatarum, in aequationibus differentialibus homogeneis.

d. 2. Decembr. 1758.

Ad Commentarios Societ. Reg. olim ſi Soſiis placet prodituros, libet in praeſenti conferre quaedam de methodo, differentialium genus integrandi, quam inter inuenta ſua, non ignobilia, retulit magnus Jo. Bernoullius, ſiquidem illam Actis Academiae Petropolitanae dicauit. Legitur in Actorum T. I. et in Operibus Bernoullii n. 136. Pertinet vero ad aequationes differentiales, quas homogeneas appellare licet, quoniam in ſingulis illarum terminis eandem dimenſionum ſummam indeterminatae efficiunt. Bernoullius ſpecimen daturus artis parum vel noſtro tempore inter geometras promotae, integrandi formulas differentiales, in quibus indeterminatae permixtae ſunt, has eligit. Methodus, qua circa illas verſatur, ingenioſa omnino eſt, ſed talis, quae ob calculi prolixitatem duobus ſaltim, iisque facillimis, exemplis applicata ab inuentore eſt. Mihi, in haec inquirenti, obtulit ſe nullo fere negotio: indeterminatas in omnibus his aequationibus ſeparari poſſe, et integrationem ad eiusdem Bernoullii inuentam, quod logarithmis vtitur, reduci. Perficitur hoc, in alterius variabilis

bilis locum ſubſtituendo, factam, ex reliqua in nouam quandam variabilem. Eius artificii quantus ſit vſus, norunt harum rerum periti. Tunc vero, et indeterminatae ſponte ſeparantur, et ſi noua, quam dixi, variabilis conſtans fingitur, habentur rectae omnes, aequationibus his, vt Bernoullius monuit, ſatisfacientes. Igitur Bernoullius eo loco nullas aequationes integrare docuit, niſi quae ex alio eius inuento, nulla praeterea arte adhibita integrari iam poſſint; quod indicare vel propterea operae pretium exiſtimo, quoniam hae aequationes vix pro talibus haberi poſſunt, in quibus indeterminatae permixtae ſint; ſiquidem tam facile ſeparari in illis poſſunt, vt nulla fere hac methodo ad artem acceſſio facta ſit. Praeterea, quae ad fractiones rationales integrandas pertinent, (ad tales enim aequationes dictae plerumque reducuntur), ita iam imprimis ab Eulero perfecta ſunt, vt qui illarum ope aequationis cuiusdam integrationem perfici oſtenderit, nihil fere artificis ingenio relinquat, cum omnia per regulas certas abſoluantur, habitusque formulae integralis vna cum conditionibus, (vt: quibus integratio algebraica fiat aut a logarithmis veris, vel imaginariis pendeat, aut algebraicam partem habeat logarithmicae iunctam) ſtatim perſpiciantur.

Quanti autem momenti ſit, haec noſſe, vel ex hoc patebit, quod in ſimpliciſſima aequationum, quas tractat Bernoullius, art. XIX. errorem commiſerit, qui in eius operibus T. IV. n. 156. p. 44. repetitur. Certo enim quodam caſu, illi rectam ſolam conuenire adſerit, cum, calculum debite ſubducendo, pateat, curuas etiam locum ibi habere; calculus autem, facta reductione, ad illam, quam dixi formam, adeo facile peragitur, vt eiusmodi error euitari nullo negotio poſſit. Occaſionem, vt haec curatius examinarem, praebuit Mechanicae Euleri T. II. §. 332. Eulerus enim lineas quaerens, per quas omnes, graue dato tempore a dato puncto ad datam rectam delabitur, ad formulas eiusmodi peruenit, quas vidi ad Bernoullianas, quas dixi, pertinere; ſimul vero perſpexi, nouo hoc Bernoullii artificio carere nos poſſe, cum commodius omnia antiquiore eius inuento peragantur.

Additio.

In aequationibus homogeneis indeterminatas ſeparari poſſe, monuit Dna Maria Gaetana Agneſi in egregio opere: Inſtituzioni Analitiche; Bonon. 1748. Lib. IV. §. 14. quod non legeram, cum ea, quam dixi, occaſione, in hanc methodum inciderem. Eulerus easdem aequationes tractat Inſtit. Calc. integral. Vol. I. (Petrop. 1768.) §. 406. Viſum tamen eſt haec, quae olim ſcripſi edere, cum negotium illud vberius et accuratius exſequantur.

§. 1. *Problema.* In aequatione differentiali homogenea $(a x^m + b x^{m-1}. y \ldots . + k x^{m-n}. y^n - - -) dx + (p x^m + q x^{m-1} y - - - + t x^{m-v} y^v - - -) dy = o$ ſeparare indeterminatas.

Sol. Pone $y = z x$ et $dy = z\,dx + x\,dz$, et aequationis pars generalis $k x^{m-n} y^n$ abit in $k x^m z^n$ et diuidendo per x^m aequatio reducitur ad

$(a + bz$

$$(a+bz\text{- - -}+kz^n\text{- - -})\,dx+(p+qz\text{- - -}+tz^r\text{- - - -}).\,(z\,dx+x\,dz)$$

$$=0 \text{ vnde habetur } -\frac{dx}{x}=\frac{+(p+qz\text{- - -}+tz^r\text{- - -})\,dz}{a+bz\text{- - -}+kz^n\text{- - - -}+p\text{- - - - - - - -}+tz^{r+1}}$$

vbi indeterminatae ſunt ſeparatae, et integratio abſoluitur eo modo, quo integrantur fractiones rationales.

§. 2. Sit F ipſarum x, y functio homogenea, ſed continens partes irrationales, erit *primo* talium partium radicalium, quaelibet ſola conſiderata homogenea, hoc eſt, termini ſub eodem ſigno radicali conſtituti, ſinguli habent variabilium dimenſiones coniunctim ſumtas easdem, *deinde* quaelibet eiusmodi pars radicalis ita multiplicatur per variabiles, vt naſcantur producta homogenea.

Sic homogenea functio eſt $x\sqrt{(x^4+y^4)}+y^2\sqrt[3]{(y^3+xy^2)}$;
Primo enim ſinguli termini ſub ſigno radicis quadraticae conſtituti efficiunt dimenſiones 4; item ſinguli ſub ſigno radicis cubicae, dimenſiones 3; eſt ergo harum partium radicalium quaelibet ſola conſiderata homogenea; *deinde* cum $\sqrt{(x^4+y^4)}$ ſit dimenſionum 2; $\sqrt[3]{y^3+xy^2}$ dimenſionis 1; illa ducitur in variabilem dimenſionis 1; haec in variabilem dimenſionum 2; vt vtrobique prodeant dimenſiones 3.

§. 3. Igitur ipſius F. (2.) pars quaeuis ita poteſt exprimi:
$x^\alpha y^\varepsilon.(ax^m\text{- - - - - - - - }+kx^{m-n}y^n)^e$ vbi erit e fractus et me $\alpha+\varepsilon=\lambda$ numero eodem pro omnibus partibus ipſius F.

Haec formula complectitur etiam partes ipſius F., quibus ineſſent quantitates radicales plures in ſe ductae, puta $\sqrt{(x^2+xy)}.\sqrt[3]{(x^2y+y^3)}$ poſſunt enim, vt notum eſt, quantitates radicales diuerſae denominationis reduci ad eamdem, et ſic productum illarum ad vnicam quantitatem radicalem.

§. 4. Poſito $y=zx$; abit $(ax^m\text{- - -}+kx^{m-n}y^n\text{ . .})^e$ in $(ax^m\text{- - - - - }+kx^mz^n\text{..})^e=x^{m.e}(a\text{- - -}+kz^n\text{..})^e$, adeoque in productum ex potentia ipſius x; in functionem aliquam ipſius z.

Igitur pars ipſius F (3.) abit in
$x^\alpha.x^\varepsilon.z^\varepsilon.x^{m.e}(a\text{- - -}+kz^n\text{..})^e=x^\lambda.z^\varepsilon.(a\text{- - -}+kz^n)^e$. Itaque ſingulae ipſius F. partes fiunt producta ex eadem vbique ipſius x potentia, exponentis λ; in alias aliasque functiones ipſius z, vt tota F fiat $x.^\lambda T$ deſignante T functionem ipſius z.

§. 5. Sint F, G, functiones ipſarum x, y, homogeneae eiusdem gradus, qui ſit λ, ſiue rationales, ſiue irrationales et poſito $y=zx$, abibunt illae in $x^\lambda.T$; $x.^\lambda V$; vt T, V, ſint functiones ipſius z; (4; 1).

§. 6. Ergo $Fdx+Gdx=0$ abit in $x^\lambda.Tdx+x^\lambda.V.(z\,dx+x\,dz)=0$
vnde habetur $-\frac{dx}{x}=\frac{V\,dz}{T+Vz}$. *Separantur ergo indeterminatae in omnibus aequationibus differentialibus homogeneis.*

§. 7. *Exemplum:* Detur $(x\sqrt[5]{y^4 x} + \sqrt{(x^4 + x^3 y)})\, dx + (y\sqrt[3]{x y^2}).\, dy = o$ hic eſt $\lambda = 2$, et

	pro F		pro G
e =	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
α =	1	0	0
ε =	0	0	1
m =	5	4.	3.

vnde $T = \sqrt[5]{z^4} + \sqrt{(1+z)}$; $V = z\sqrt[3]{z^2}$

§. 8. Si ponatur z conſtans, adeoque $dz = o$ in §. 6. fit $T\,dx + V\,z\,dx = o$; $T + Vz = o$;

Vt idem habeatur ex $-\frac{dx}{x} = \frac{V\,dz}{T+Vz}$, exprimatur haec aequatio ſic $-\frac{dx.\,(T+Vz)}{x} = V\,dz$, vbi non poteſt poni $dx = o$ quoniam x debet eſſe variabilis. Igitur vt ſit $dz = o$; debet eſſe $T + Vz = o$.

§. 9. Aequatio $T + Vz = o$ praeter z non continet niſi quantitates conſtantes; eſt igitur determinata, habens tot radices z, quot eſt dimenſionum. Tot igitur prodeunt valores conſtantes ipſius z; quorum quilibet adhibitus in aequatione $y = z\,x$, dat rectam aliquam, cuius abſciſſae ſint x, ordinatae y; recta vero ipſa tranſeat per initium abſciſſarum, et ad lineam abſciſſarum inclinetur anguli cuius tangens = z.

§. 10. Sint F, G, functiones rationales integrae (§. 1.) et ipſius y poteſtas altiſſima ſit n in F; r in G; erit aequatio determinata §. 9. Graduum vel n vel r + 1 prout n vel r + 1 maius eſt.

§. 11. *Exemplum* §. 1. $(a\,x + b\,y).\, dx + (c\,x + e\,y)\, dy = o$.

I. Comparando quantitates §. 1. et huius, eſt

§. 1.	m	n	r	a	b = k	p	q = t
hic	1	1	1	a	b	c	e

Vnde $-\frac{dx}{x} = \frac{c + e\,z}{a + b\,z + e\,z^2 + c}\, dz$

II. In §. 6; hic $T = a + b\,z$; $V = c + e\,z$

III. Hinc in §. 9. Pro z conſtante eſt $a + b + c\,z + e\,z^2 = o$

vnde $z = \frac{-(b+c) + \sqrt{((b+c)^2 - a\,e)}}{2\,e}$, pro duabus rectis aequationi ſatisfacientibus.

IV. Di-

IV. Dicatur $\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)} = f$, vt in (III) fit $z = -\frac{(b+c)}{2e} = f$; eſt $(z + \frac{b+c}{2e} - \frac{f}{2e}) \cdot (z + \frac{b+c}{2e} + \frac{f}{2e})$

$= (z + \frac{b+c}{2e})^2 - \frac{f^2}{4e^2} = z^2 + \frac{(b+c)}{e} z + \frac{a}{e}$

V. Reducatur aequatio ad formam

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\frac{c}{e} + z}{\frac{a}{e} + \frac{b+e}{e} z + z^2} \cdot dz$$

VI. Fac $z + \frac{b+c}{2e} = u$; vnde $dz = du$, et ex IV.

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\frac{c}{e} + u - (\frac{b+c}{2e})}{(u - \frac{f}{2e}) \cdot (u + \frac{f}{2e})} \cdot du \text{ ſeu}$$

$$+\frac{dx}{x} = \frac{(\frac{c-b}{2e} + u) \cdot du}{\frac{f^2}{4e^2} - u^2}$$

VII. Fractionem hanc methodis notis reſoluendo in ſimplices (*) ſit

$$\frac{dx}{x} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{c-b}{f} - 1)\, du}{\frac{f}{2e} + u} \times \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{c-b}{f} + 1)\, du}{\frac{f}{2e} - u}$$

et

(*) Qui vti vult Analyſi mea infiniti, ita comparationem quantitatum inſtituet:

ibi §. 359.	z	a	b	α	$\varkappa$	$\frac{a}{\alpha}$	$\frac{b}{\varkappa}$
hic	u	$\frac{c-b}{2e}$	1	$\frac{f}{2e}$	1	$\frac{c-b}{f}$	1

et

$$2.\ \log.\frac{x}{m} = \left(\frac{c-b}{f} - 1\right).\ \log.\left(\frac{f}{2e} + u\right) - \left(\frac{c-b}{f} + 1\right).\ \log\left(\frac{f}{2e} - u\right)$$

Vbi m eſt conſtans in integratione addenda

Poſito $\frac{e-b}{f} = n$ hinc habetur

$$\frac{x^2}{m^2} = \frac{(f+2eu)^{n-1}}{(f-2eu)^{n+1}} \cdot 4e^2$$

VIII. Poſito $u = o$ ſit $x = \frac{2me}{f}$ qui valor ipſius x reſpondet valori $z = -\frac{(b+c)}{2e}$

(VI) et pro eodem valore erit $y = -\frac{(b+c)}{x}.\ m.$

IX. Haec pro caſu *primo*, f realis, ſeu $(b-c)^2 > 4ae$.

§. 12. Caſus *ſecundus* eſt $f = o$ ſeu $b+c = 2\sqrt{ae}$

Tunc in §. 11. VI; fit

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\left(\frac{c-b}{2e} + u\right)du}{u^2} = \frac{\frac{c-b}{2e}\,du}{u^2} + \frac{du}{u}$$

$$\text{Vnde } \log\frac{m}{x} = -\frac{(c-b)}{2eu} + \log u$$

§. 13. Caſus *tertius* f imaginarii; Pro illo pone $(b+c)^2 - 4ae = -4e^2r^2$ vbi r^2 eſt quantitas poſitiua; itaque $f = 2re\sqrt{-1}$. et $\frac{f^2}{4e^2} = -r^2$, Vnde in §. 11. VI. fit

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\left(\frac{c-b}{2e} + u\right)du}{u^2+r^2} = \frac{\frac{c-b}{2e}\,du}{u^2+r^2} + \frac{u\,du}{u^2r^2}$$

$$= \frac{\frac{c-b}{2re}\cdot\frac{du}{r}}{1+\frac{u^2}{r2}} + \tfrac{r}{2}\cdot\frac{2u\,du}{u^2+r^2}, \text{ Igitur}$$

$$\log\frac{m}{x} = \frac{c-b}{2re}.\ \text{Arctang}\frac{u}{r} + \log\sqrt{(u^2+r^2)}$$

§. 14.

§. 14. Si $c = b$, fit

Caſu *primo* (11; VII); $n = o$; et $\frac{x^2}{m^2} = \frac{4e^2}{f^2 - 4e^2u^2}$

Secundo (12) $m = ux$

Tertio (13) $m^2 = x^2 (u^2 + r^2)$.

§. 15. Si $e = o$, aequatio fit (11, I.) $-\frac{dx}{x} = \frac{c\,dz}{a + (b+c).z}$. Vnde

$\log \frac{m}{x} = \frac{c}{b+c} . \log (a + (b+c)\,z)$. Seu

$\frac{m}{x} = (a + (b+c)\,z)^{c:(b+)}$

Deducantur hinc aequationes inter x et y

§. 16. Caſu *primo* In 11; VII eſt $\frac{x^2}{4e^2 m^2} = \frac{(f + 2eu)^{n-1}}{(f - 2eu)^{n+1}}$

Iam $2eu = 2ez + b + c$ (11; VI)

$= \frac{2ey + (b+c).\,x}{x}$, et $f \pm 2eu$

$= \frac{(f \pm b \pm c)\,x \pm 2ey}{x}$; quibus valoribus ſubſtitutis reperitur

$\frac{1}{4e^2 m^2} = \frac{((f+b+c).\,x + 2ey)^{n-1}}{((f-b-c).\,x - 2ey)^{n+1}}$

§. 17. Cum hic ſit $n \mp 1 = \frac{c - b \mp f}{f}$, eleuando vtrinque ad potentiam f; habetur

$(\frac{1}{4e^2 m^2})^f = \frac{((f+b+c).\,x + 2ey)^{c-b-f}}{((f-b-c).\,x - 2ey)^{c-b+f}}$, et inuertendo

$\frac{((f-b-c)\,x - 2ey)^{c-b+f}}{((f+b+c)\,x + 2ey)^{c-b-f}} = (4e^2 m^2)^f$

ſeu

$((f-b-c)\,x - 2ey)^{c-b+f} . ((f+b+c).\,x + 2ey)^{b-c\mp f} = (4e^2 m^2)^f$

§. 18. Si multiplicetur $(f+b+c).\ x+2ey$ per $(f-b-c)$, prodit $-2e.\ (2ax+(b+c-f)\ y)$, similiter

$$((f-b-c)\ x-2ey).\ (f+b+c) = -2e.\ (2ax+(b+c+f)\ y)$$

$$\text{Ergo } (f+b+c).\ x+2ey = \frac{-2e}{f-b-c}.\ (2ax+(b+c-f)\ y)$$

$$(f-b-c)\ x-2ey = -\frac{2e}{(f+b+c)}.\ (2ax+(f+b+c)\ y)$$

§. 19. His valoribus substitutis aequatio vltima (17.) abit in

$$(2ax+(b+c-f).\ y)^{b-c+f}(2ax+(f+b+c).\ y)^{c-b+f}=(f+b+c)^{c-b+f}(f-b-c)^{b-c+f}m^{2f}$$

Pars sinistra variabilis eadem est cum parte sinistra aequationis integralis primae ap. Io. Bernoull. §. XVI. Litteras adhibui Bernoullii, nisi quod eius m sit mihi f. Partem dextram designauit per C. Haec aequatio alia aliaque forma exhiberi potest, quas quaerat, qui vult apud Bernoullium.

§. 20. Si vel e vel a est $=0$; fit $f=\pm(b+c)$.
Ergo si $a=0$; aequatio §. 19. fit $0=0$. Adhibeatur tunc illa §. 17. et prodibit

$$y^c.\ ((b+c).\ x+ey)^b = 2^{b+c}.\ e^{2b+c}.\ m^{2b+2c}$$

similiter pro $e=0$; illa §. 17. daret
$0=0$ et adhibenda est ea §. 19; aut, quod breuius est, ex §. 15. deducitur

$$m^{b+c}=(ax+(b+c).\ y)^c.\ x^b$$

§. 21. Casu *secundo* (12.) $\frac{c-b}{2eu} = \log\frac{ux}{m}$ abit in

$$\frac{(c-b)..x}{2ey+(b+c).\ x} = \log\frac{2ey+(b+c)\ x}{2em}$$

seu propter $b-c=2\sqrt{ae}$;

$$\frac{(c-b).\ x\sqrt{e}}{2e.\ (y\sqrt{e}+x\sqrt{a})} = \log\frac{y\sqrt{e}+x\sqrt{a}}{m\sqrt{e}}$$

§. 22. Casu *tertio* (13.) est $\log\frac{m}{x\sqrt{(u^2+r^2)}} = \frac{c-b}{2re}\ \text{Arctang}\ \frac{u}{r}$

quod hic abit in

$$\log\frac{2me}{\sqrt{((2ey+(b+c)\ x)^2+4e^2r^2x^2)}} = \frac{c-b}{2re}.\ \text{Arctang}\ \frac{2ey+(b+c)\ x}{2erx}$$

Rectae

Rectae ſatisfacientes n. III.

§. 23. Aequationes pro his rectis ſunt propter $z = \frac{y}{x}$;

I.) $y = \frac{f-(b+c)}{2e}$. x; II.) $y = \frac{-(f+b+c)}{2e}$. x

§. 24. Pro caſu ſecundo fiunt ambae aequationes eaedem $y = \frac{-(b+c)x}{2e}$

§. 25. Caſui tertio nulla recta ſatisfacit.

§. 26. Bernoullius aliam aequationem integralem habet nullam, quam eam §. 19; Quae, cum aptetur ſaltim caſui primo, manifeſtum eſt, eum aequationem §. 11. vniuerſaliter non integraſſe.

§. 27. Hanc ob cauſam in leuem errorem incidit ſcripti ſui §. XIX., vbi ſi eius m, vel meum $f = o$, concludit fore $2ax\,(b+c).\,y =$ Conſt, et curuam nullam ſatisfacere, cuius contrarium docet (21).

§. 28. Si vero ſit hoc caſu $b = c$, fit $y\sqrt{e} + x\sqrt{a} = m\sqrt{e}$, quod ob $\sqrt{e} = \frac{b}{\sqrt{a}}$, reducitur ad $by + ax = mb$. Sed ſi $b = c$; aequatio Bernoullii fit $ax + by = \frac{\text{Conſt}}{2}$ aequipollens repertae.

§. 29. Si $ae = bc$ eſt $f = \pm (b - c)$
Sumto $f = + c - b$; aequatio (§. 19.) abit in $ax + cy = + mc$; Sumto autem $f = b - c$ eadem aequatio abit in $ax + cy = - mc$; hic igitur nulla curua aequationi differentiali ſatisfacit.

§. 30. Igitur in hypotheſibus §. 28. 29. integratio ducit ad rectas. Hae aequationes ad rectas, poſito $m = o$, fiunt eaedem cum illis §. 23.

V.

De vera infiniti notione.

d. 8. Maii 1759.

In eo quod infinitum recentiores mathematici vocant, ad notiones veterum geometrarum reducendo, opera collocanda eſt cuiuis, qui de euidentia cogitat repertis recentiorum quanta deſiderari poteſt adſerenda. Antiquae Graeciae notum eſt hanc eſſe laudem, vt quae pulchritudinis abſolutae, eadem etiam certitudinis ſummae exemplaria nobis praebeat: igitur, poſtquam inter geometras percrebuit *infiniti* no-

 men,

men, paullo poſt Carteſium, qui illud adeo adhuc reformidabat, vt mallet *indefiniti* vocabulo vti, fuerunt qui oſtenderent, nihil illis de infinito adſertis contineri, quod non cum antiquorum placitis congrueret; alii, laboris huius pertaeſi, ipſaque nouitatis ſpecie delectati, theoriam quandam infiniti commenti ſunt, multa continentem, quae in ſcriptis antiquorum verſatus, non poſſit non, ſic vt ipſi oſtenduntur incredulus odiſſe. Ita Fontenellius, ne ſcilicet ſeueriſſimi eruditorum, geometrae, fabula mileſia plane carerent, de infinito talem adornauit, in qua, praeter alia iucundiſſima, quantitates etiam reperias, quae nec finitae ſint nec infinitae, et quibus velut pontibus ex finito ad infinitum eatur. Sed, vt aeque vere ac iocoſe obſeruabat B. Hauſenius, non cogitauit, vt ad hos pontes ex finito tranſeatur, aliis pontibus opus eſſe. Quam veram iudicem infiniti ideam, breuibus explicare liceat. Ex illa, vidi, rigore geometrico deduci poſſe vſus ad quos infinitum adhibetur; ſed haec prolixiora ſunt atque abſtruſiora, quam vt praelegi poſſint, igitur indicaſſe praecipua ſuffecerit. (*)

Infinite magnam vocant quantitatem, cuius incremento limes nullus ſtatui poteſt, et quae maior omni dabili concipitur; quod idem eſt, ac ſi dicas ipſam non dari, alias enim dum omni quae datur maior eſt, ſe ipſa maior eſſet. Igitur infinite magnum, non *quantitatis* nomen eſt, ſed *poſſibilitatis ſine fine et vltra omnes limites creſcendi.* Contra, infinite paruum, non *quantitas* eſt, ſed ea *quantitatis adfectio*, qua *ſine limite decreſcere*, *omnique propoſita minor fieri poteſt;* ſi dimidii dimidium ſumas, hoc eſt $\frac{1}{4}$ et huius quartae partis rurſus dimidium; et ſic capiendo dimidia ſine fine pergas, perſpicuum eſt, quantumcunque exigua pars vnitatis detur, hanc biſſectionem continuari poſſe, donec perueniatur ad fractionem data vnitatis parte minorem. Ad fractionem quae omnino nihil ſit, nunquam peruenitur, non enim fractionis quantumuis exiguae dimidium nihil eſt; peruenitur vero ſemper ad fractionem, nihilum data quauis quantitate minus ſuperantem. Praeterea; quo plura eiusmodi dimidia ſibi adduntur, eo propius ſumma illorum ad vnitatem accedit, perpetuo tamen vnitate minor. Haec, quae vel naturalis arithmetica edocere quemlibet poteſt, ſic ſolent enunciari: Seriei dimidiorum in infinitum continuatae vltimam partem euaneſcere, ſummam vero vnitati eſſe aequalem. Patet hic ſeriem eo continuatam ſumi, quo continuari non poteſt, et vltimam partem fingi, vbi non eſt vltima, ſummam vero appellari, id ad quod ſumma vera, ſine fine accedere poteſt, vno verbo: quae perpetuo mutantur, vt partes illae ſeriei dimidiorum, et partium ſumma, velut abſoluta cogitari, illisque aequalia poni, ad quae mutationibus ſuis ſine fine tendunt.

Hoc

(*) Vt praecepta calculi infinitorum, rigore geometrico demonſtrarem, notiones directrices, quas breuiter hic explico ſequutus, operam dedi in Elementis Analyſeos infiniti (*Anfangsgründe der Analyſis des Unendlichen*) Götting. 1761.

Hoc ſenſu infiniti vocabulo tributo, nihil paradoxi omnibus de infinito adſertis contineri perſpicitur, vt: infinitum aliud alio maius, immo infinities maius eſſe. Trianguli rectanguli angulus unus ſit 30. graduum. Igitur crus ei oppoſitum, hypothenuſae perpetuo dimidium erit, cuiuscunque magnitudinis ſint crus et hypothenuſa. Poteſt autem crus data quauis recta maius ſumi; et tunc hypothenuſa duplo eiusdem rectae maior fiet, quod dicunt crus infinitum fieri poſſe, eiusque infiniti duplam fieri hypothenuſam. Ordinata parabolae, quadrato abſciſſae exprimitur parametro pro vnitate adſumta, vt poſſint lineae ad numeros reuocari: Poteſt autem abſciſſa numerum quemuis ſuperare eiusque numeri quadratum ſuperat ordinata, quod dicitur ordinatam exprimi quadrato abſciſſae infinitae, adeoque illam infinities continere. Ita infinita aliis infinitis infinities maiora intelliguntur. Deinde ſi detur quotiens quidam cuius diuiſor et diuidendus variabilem quandam quae ſine fine creſcere poſſit contineant, oſtenditur: quotientem hunc, data quauis quantitate propius accedere poſſe ad id quod naſcitur parte diuidendi, quae altiſſimam variabilis potentiam continet per ſimilem partem diuiſoris diuiſa: Hoc eodem redit ac ſi reiicerentur reliquae partes, velut his infinities minores. Qui ita loquuntur, non ſuſpicionem mouent, ſed fatentur, errorem committi, quem ob exiguitatem contemnant; cum tamen nullus error ſit quem contemnere deceat, vbi exacta veritas quaeritur; contra ſi oſtendatur, inter id quod reperimus verumque quotientem differentiam adſignari poſſe nullam, verum quotientem repertum eſſe nemo dubitat, niſi qui de Euclidis et Archimedis demonſtrationibus dubitat.

Haec eo tendere videtis auditores, vt, ſi retinendum ſit infiniti vocabulum, ſiue quod commodum illud prae aliis videtur ad demonſtrationes in breuitatem contrahendas, ſiue quod ſemel vſu introductum eſt, de vera tamen eius notione explicanda ſolliciti ſimus, et principes huius theoriae de infinito propoſitiones, quae non admodum multae ſunt, demonſtrationibus ad normam antiquorum factis firmemus. Id vero a geometris magni nominis non ſemper factum eſt. Alius finitorum ad infinita rationem explicaturus, puluillum in vertice montis ſitum cum ipſo monte comparat; alius infinitorum nihilorum ſummam, eſſe aliquid affirmat, exultans imaginem ſe creatricis potentiae infinitae reperiſſe, quaſi mathematicorum infinitum idem eſſet, quod methaphyſici ſic vocant, dum de Deo loquantur. Infinite paruum, ſummus inter analystas Eulerus pro nihilo habet, quoniam vero infinite parua omnia aequalia ſtatuere non poterat, nihilum vnum in data quauis ratione ad aliud eſſe poſſe contendit. Cum enim bis nihil aeque nihil ſit ac ſemel nihil; illud nihilum quod bis ſumitur, dimidium eſſe contendit alterius nihili quod ſemel ſumebatur.

Si variabilis quantitas per aliam variabilem datur; altera mutata, alteram quoque mutari neceſſe eſt. Facile autem oſtenditur, rationem quae inter harum quantitatem augmenta vel decrementa, intercedit, continuo propius propiusque accedere poſſe ad rationem differentialium, quae Leibnitius vocauit. Rurſus igitur in differentialium

calculo non negliguntur infinite parua ob exiguitatem, ſed limes ad quam ratio quaedam variabilis, data quauis quantitate magis accedit, huius rationis loco vt antiqui fecerunt adhibetur. Haec differentialium ratio, eadem eſt cum ratione ſpatiorum quae eodem tempore deſcriberentur celeritatibus iis, quibus quantitates dato inſtanti mutantur, et ſic ad differentialia reducuntur fluxiones Britannorum, quas iuſto opere explicauit Colin Mac Laurin. Minus accurate igitur calculi differentialis ſcriptores differentialia velut augmenta quae *actu accedant* ad quantitates variabiles conſiderant, cum augmenta ſint, quae *accederent*, ſi quantitates data velocitate tempore quodam dato mutarentur; In integrali calculo, *ſumma* non eſt id, quod ex additione particularum infinite paruarum naſcitur, ſed id, cuius differentiale, differentiali adſumto aequale eſt, vnde rurſus patet nulla elementa ſecundi gradus vt vulgo traditur, in integrationibus negligi.

Intelligitur ſimul verum infiniti vſum nihil continere, quod a communibus geometrarum notionibus recedat. Qui in illo incomprehenſibilia, et tantum non contradictoria reperiunt, ambiguitate verborum plerumque falluntur, et infinitum quod reuera adfectio quantitatis eſt, pro quantitate ipſa habent. Sed quas poetis, et reliquis, qui delectare volunt ſcriptoribus ſeuerior critica interdixit dilogias; in illis ingenii gloriolam quaerere veri cuſtodes geometras profecto parum decebit.

Additio.

Cum haec audiſſet in conſeſſu Societatis, B. Io. Matthias Geſnerus, legere etiam voluit. Subiicio, quae ea occaſione mihi ſcripſit; Inde, quanti et haec ſtudia fecerit, intelligent qui eas litteras colunt in quibus Geſnerus ſummus erat. Aequum vero erat, vt, qui tot rebus accedebat ad ſimilitudinem Philippi Melanchthonis, idem etiam, noſtras artes, vt antiquior ille Germaniae praeceptor, amaret.

Quae intelligo et aſſequor, ea valde ſunt ad guſtum meum, et conueniunt cum his, quae, mihi quoque in mentem cum veniſſent, non audebam putare eſſe καθολικά.

Niſi fallor, haec eadem doctrina, ad portenta τῶν ἀσυμπτώτων minuenda prodeſt &c.

T.

I. M. G.

VI.

Ad theoriam cochleae pertinens obſeruatio geometrica.

d. 6. Octobr. 1759.

Cochleam, inter potentias mannales vulgatiſſimam, accuratius contemplanti de figura illius dubia nonnulla naſci poſſunt, quae a ſcriptoribus ſtatices tacta non memi-

memini. Omnes docent naſci cochleam, cum planum inclinatum cylindro circumuoluitur; plani autem inclinati loco, triangulum pingunt quod proprie eſt ſectio verticalis, plani inclinati, interſectioni plani inclinati cum horizonte recta. Ad ipſum planum inclinatum quale natura exhibet vulgares elementorum compilatores non attendere, mirum non eſt; illi enim in mathematica doctrina prae aliis hoc praecipui habent, quod de charta in papyrum deſcribant non verba ſaltim, ſed et figuras. Inter practicos, Leupoldum vidi, theatri machinar. generalis §. 114. Tab. XVIII. fig. 1. integrum cuneum qualis plana ſuperficie gaudet, circa cylindrum voluiſſe vt cochleam obtineret. Attendens vero, quid contingere debeat plano circa cylindrum voluto, facile intellexi omnia ſic contorqueri debere, vt ſitus partium plani, inter ſe, et ad horizontem, cui rectum pono cylindrum, manere non poſſit. Igitur cum circum volutione hac curua ſuperficies naſci primo intuitu videretur, de illa in elementa plana reſoluenda cogitaui, quorum ſingulorum eadem ſit ad horizontem inclinatio. Eam rem ſic adgreſſus ſum: Triangulum illud, quod ante dixi, inclinatum planum verticaliter ſecare, ſuperficiei cylindri circumuolutum poſui, vt hypothenuſa eius, lineam illam in cylindri ſuperficie, quae helix appellatur efficeret. Huius lineae elementum cepi, ductisque a terminis eius ad axem cylindri rectis, planum triangulare elementare obtinui, eodem angulo ac elementum helicis ad horizontem inclinatum, quod habui pro elemento ſuperficiei, quam helix intra ipſum cylindri ſolidum definiret. Quod autem eodem modo per helicis elementum proximum datur planum elementare, vidi praecedens in recta ſecare quae tota extra cylindrum cadit, vt duo haec plana intra cylindrum contermina, nullibi ſint niſi in ipſa cylindri ſuperficie, eoque helicis puncto, quod vtrique elementorum quae dixi commune eſt, ceterum hiatu quodam verticali dirimantur. Vnde efficitur, vt circa axem cylindri volui non poſſit ſuperficies in omnibus ſuis partibus aequaliter ad horizontem inclinata, ſed id ſola linea helix in ſuperficie cylindri praeſtet, Quae igitur cochleae ſuperficies ab hac linea terminatrice verſus axem ſita eſt, ad idem planum inclinatum ad quod ductus helicis in ſuperficie cylindri revocatur, pertinere nequit. Conſtat autem, cochleae hanc ſuperficiem, nunc planam nunc curuam formari. De curua cum innumeris modis variari queat dicere hic non poſſum. Planae geneſis commode concipitur recta per axem cylindri ita deſcendente, vt axi perpetuo quidem perpendicularis maneat inter deſcendendum vero motu circulari circa hunc axem gyretur. Ita vero huius rectae punctum quodvis in ſuperficie cylindri, cuius radius diſtantiae puncti ab axe aequatur, ſuam lineam helicem deſcribet, eo minore angulo ad baſin cylindri inclinatam, quo maior eſt radius. Igitur, ſi ex inclinatione helicis ad baſin cylindri, rationem inter vim atque pondus aeſtimemus, multum refert, in qua helice pondus attollatur, hoc eſt in qua parte ſuperficiei cochleae, vtrum in exteriore an in interiore verſetur, quod rurſus non video a practicis ſcriptoribus obſeruari. Sed de his, quae ad vires cochleae applicatas pertinent, iam differendi locus non eſt, vbi intra geometriae fines me contineo.

Prop.

Prop. I. Lemma ſtaticum.

Corpus graue; impoſitum vbicunque plano inclinato GDΔΓ fig. 1. deſcendere conatur ſecundum rectam ſectioni plani inclinati cum horizonte; ΔD, perpendicularem.

Cor. Sit GB horizonti recta et graue puncto G impoſitum deſcendere conabitur ſecundum GD hypothenuſam trianguli GDB; quae ratio eſt, cur plane integri GD, ΔΓ loco plerumque conſideretur hoc triangulum vrticale cuius hypothenuſa eſt recta in plano inclinato, perpendicularis ſectioni plani inclinati et horizontis.

Prop. II. Problema.

Cylindro recto, cuius baſis in horizonte ſita, centrum habet O fig. 2 radium OP; axis eſt OF, circumuoluatur triangulum BGD fig. 3. ſic vt BG. congruat parti lateris cylindri PQ; BD curuetur in arcum circularem PT, et adeo GD in *helicem* QT; ſit autem Qq elementum helicis; reſpondens elemento Gg fig. 2. Quaeritur planum in quo ſit Qq; quod eo angulo ad horizontem inclinetur, quo inclinatur Qq.

Sol. Producta Qq occurrat horizonti in E; eſt vero Qq in plano elementari QqpP, tangente cylindrum, horizonti recto, ſi Pp ſit elementum peripheriae baſeos. Vnde E eſt in eodem plano et ſimul in horizonte, adeoque in ſectione eius plani cum horizonte, hoc eſt in tangente PE ſeu elemento Pp producto. Angulus vero PEQ eſt elementi Qq ad horizontem inclinatio; cui aequalis eſſe debet plani quaeſiti ad horizontem inclinatio. Planum vero anguli inclinationis duorum planorum, ambobus rectum eſt, igitur planum anguli inclinationis de quo agitur, per QE transiens rectum eſſe debet et quaeſito et horizonti, adeoque eſt ipſum QEP, cum per eamdem QE duo plana horizonti recta transire non poſſint. Igitur QEP eſt rectum ſectioni quaeſiti plani et horizontis; et adeo haec ſectio EM; parallela eſt ipſi PO eidem EPQ rectae. Habetur ergo planum quaeſitum ſi habeatur E. Hoc autem punctum ſic reperitur: Quoniam PQq=BGg eſt QEP=GDB; imo ΔQEP=ΔGDB; ducatur ergo in baſi cylindri ad P tangens PE=BD dabitur QE, et per E ipſi PO agenda parallela EM; adeoque planum quaeſitum QEM.

Cor. 1. Per Q transeat circulus baſi parallelus cuius centrum F; exiſtente OF=PQ; erunt parallelae ſectiones plani QEM cum circulo hoc et cum baſi, et adeo ſectio cum circulo erit QF, parallela ipſo PO et adeo ipſi EM.

Cor. 2. Igitur QqF eſt in plano quaeſito, cuius inclinatio ad horizontem aequatur ipſius Qq inclinationi ad horizontem, inclinatio vero ad planum verticale POF aequatur qQP angulo.

Cor. 3. PE=BD=PT arcui.

Cor. 4. Similiter capta Of=pq actis qf, 2qf; eſt qf2q planum in quo eſt helicis elementum proximum q2q, et quod ad horizontem inclinatur angulo illo quo incli-

inclinatur q 2 q; cum plano verticali q p O vero continet angulum 2 q q p = q Q P quoniam Q T ad omnia latera cylindri aequaliter inclinatur, vt G D ad omnes perpendiculares in B D;

Cor. 5. Tangens ad p seu elementum p 2 p = P p productum sit pe = p T arcui, acta per e ipsi O p parallela em est plani q 2 q f sectio cum horizonte.

Cor. 6. pe = p T arcui = P T arcui — P p = P E — P p = p E; vnde E e est arculus centro p radio p E descriptus. Angulus P O p dicatur du, est pe E = R — $\frac{1}{2}$ E pe = R — $\frac{1}{2}$ du

Cor. 7. O pe = O p 2 p = O P p (Cor. 5.) = R — $\frac{1}{2}$ du, vnde 2 R — O p e seu pem = R + $\frac{1}{2}$ du; vnde pem + p e E — 2 R (Cor. 6.) adeoque e m; e E; iacent sibi in directum, seu E cadit in m E productam.

Cor. 8. Est igitur E in sectione planorum Q F q; q f 2 q; in eadem vero sectione est q; vnde haec sectio est q E seu Q E cum per prop. E sit in Q q producta; cadit autem Q E tota in planum tangens cylindrum, vnde plana Q F q; q f 2 q intra cylindrum nullibi se secant.

Cor. 9. Planis Q F q; q f 2 q interiectum est F q f verticale ob F f verticalem; quo intra cylindrum velut hiatu seiunguntur, vt transitus ex vno in alterum nullus detur.

Cor. 10. Si cochleae superficies intra lineam Q T et axem O f resoluitur in plana elementaria aequaliter ad horizontem inclinata; illa nullibi contermina sunt nisi in linea Q T; vt graue quod descendere debet per superficiei cochleae partes aequaliter ad horizontem inclinatas conterminas; alibi quam in helice Q T descendere non possit.

Prop. III. Problema.

In radium positione datum O T, ex termino P arcus indefiniti demissa perpendiculari P V reperire aequationem inter O V = x; V P = y; P Q = z.

Sol. Radius O T = O P, dicatur r; Quoniam T Q, P Q, T P, sunt vt sinus totus, sinus, cosinus, anguli D; fig. 2; qui dicatur α; est P Q = P T. tang α Arcus vero P T = r. Arcsin $\frac{y}{r}$ = r. Arccos $\frac{x}{r}$ = r. Arc tang $\frac{y}{x}$. Igitur aequatio tribus diuersis modis exprimi potest, quorum primus est

$$z = r.\ \text{tang}\ \alpha.\ \text{Arcsin}\ \frac{y}{r}$$

Cor. 1. Pro integra reuolutione sit P Q = b et ratio diametri ad peripheriam = 1 : π; erit b = 2 r π. tang α

Hac aequatione simul definitur relatio inter inclinationem helicis ad horizontem, altitudinem eius et radium cylindri.

Cor. 2. Aequatio differentialis eſt $dz = \frac{r.\ tang\ \alpha\ dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$

Cor. 3. Patet helicis geneſin ita poſſe concipi: Recta = r; congruat primo radio poſitione dato OT; adſcendat vero extremo ſuo vno, per axem cylindri, ita vt axi perpetuo perpendicularis maneat, ſimul gyretur motu circulari circa axem; Ita altero ſuo extremo deſcribet helicem, poſitis motibus, adſcenſus et gyrationis vniformibus. A ratione inter velocitates horum motuum pendent conditiones helicis. Ratio haec ita definitur, vt cum recta motu gyratorio deſcripſerit integrum circulum, adſcenderit per altitudinem b.

Cor. 4. Motu hoc quoduis punctum rectae adſcendentis aliam helicem deſcribit, eo minore angulo ad baſin cylindri inclinatam, quo maior eſt x ſeu puncti ab axe diſtantia (Cor. 1.) poſito b eodem.

Schol. 1. Vt circa eundem axem aliis aliisque radiis innumeri cylindri deſcribuntur, ita in cuiusuis ſuperficie motu Cor. 3. helix deſcribitur.

Schol. 2. Multa ad ductum helicis in ſuperficie cylindri pertinentia prolixe docet Guido Vbaldus in Lib. I. II; operis de cochlea (Venet. 1615.) ad explicandam cochleam quae *Archimedis* vocatur ſcripti.

Cor. 5. Plano inclinato Prop. 1. impoſitum graue; vbique eadem vi deorſum tendit, quae ex inclinatione plani aeſtimatur, *grauitas reſpectiua* ſtaticis appellata. Haec autem grauitas reſpectiua corpus ſuperficiei cochleae impoſitum eo magis deorſum vrget, quo propius axi eſt, helicemque deſcribit maiori angulo inclinatam (Cor. 4.) quae ad vires cochleae computandas pertinere facile intelligitur.

VII.

Gnomica vniuerſalis analytica.

d. 13. Febr. 1762.

Animus eſt, exhibere Societati regiae methodum vniuerſalem, horologia ſolaria in planis delineandi, formulis analyticis, quibus calculorum trigonometricorum leges continentur explicatam. Qua in re, ne actum agere videar, in negotio ſcilicet, adeo trito, ac ſunt horologiorum deſcriptiones, quantum mea opera differat vel a regulis vulgarium libellorum, vel ab illorum, qui eadem vniuerſaliter complexi ſunt conatibus, breuiter eſt indicandum. Horas diei ex vmbra cognoſcere ad humana negotia debito tempore peragenda, neceſſarium eſt cum automatorum motus, quibus mechanica magis exculta nos inſtruxit, ipſi ad ſolem ordinandi ſint. Igitur infinita multitudo prodiit librorum, qui artem vtiliſſimam docent. Hi tantum non omnes diuer-

diuerſos plani, in quo deſcribitur horologium, poſitus ſigillatim perſequuntur, et pro quouis horologio alias regulas iubent ediſcendas. Cum tamen ſolariis omnibus commune ſit, horas vmbra axis mundani indicari, cuius vmbrae ſitus pro quauis hora definiri poteſt ex ſitu horologii, vmbraque eidem horae in aequatore reſpondente, aliquot autores vſi ſunt hoc principio ad methodos generales horologiorum conſtruendorum edendas. Horum duos ſaltim hic nominare liceat: Gregorium in Aſtronomia Phyſica et Geometrica Lib. II. Prop. 42. ſeq. et Hauſenium in Actis Soc. Caritatis et Scient. Saxonicae Tomo I. Cum vero recentioribus temporibus magno vſui fuerint formulae analyticae ad complura problemata ſphaerica translatae, tentare libuit, quid ex illis ad praeſens negotium faciens, deduci queat, viſusque mihi ſum, hoc ſubſidio adhibito, omnia breuius et concinnius expedire poſſe.

Ordior vero a problemate geometriae purae, quo, datis duobus planis ſibi rectis, dataque tertii cuiusdam plani ad vnum rectorum poſitione eiusdem tertii quaeritur poſitio, ad rectorum alterum. Haec, quo pertineant, facile intelliget, qui rectos eſſe meridiano aequatorem, et horizontem cogitauerit, ſicque, dato plani horologii ad vnum illorum poſitu, poſitum ad reliquos reperiri. Hinc ſtatim colliguntur, varia tum ad praxin facientia, tum, quod vniuerſalis planorum ad circulos ſphaerae velatorum proprietates doceant memoratu digna. Ita, cum plani dati facile innoteſcat inclinatio, angulusque inter horizontalem in plano ductam, et meridianam horizontis contentus, computari inde poſſunt declinatio plani, item poſitio rectae in qua planum ſecatur a meridiano. Nullum autem dari planum, in quo ſumma inclinationis et declinationis recto minor ſit, ad generales illas, quas dixi, proprietates pertinet.

Quae de horologio datae inclinationis et declinationis, quaeri poſſunt, continentur poſitione *meridianae horologii*, in qua ſcilicet ſecatur horologium a meridiano, poſitione *ſubſtylaris*, et ſtyli, denique linearum horariarum ad quas ducendas quaeſiui ſectiones horologii cum aequatore, et cum horaria quauis aequatoris. Haec omnia primum formulis analyticis complexus ſum, adieci vero inde deductas leges calculorum trigonometricorum ſolis logarithmis peragendorum, additis exemplis, tum particulari quodam, quo ſingulae regulae illuſtrantur, tum quibusdam generalioribus. Nam, verticalium, v. g. aut inclinatorum, quae vulgo vocant, theoriae generales, a ſcriptoribus in problemata plurima, quorum quoduis alio modo reſolui videtur diſtinctae, huius methodi caſus particulares ſunt omnes ſecundum easdem leges, et certo quodam ordine expediendi, quod quam facilem omnem horologiorum deſcriptionem reddat, perſpicuum eſt. De inclinata vero, quae generalem methodum poſtulant, hac mea non multo operoſius quouis cardinalium conſtruuntur, cum illa ſcriptores gnomonici, tantum non omnes, ob difficultatem reformident, aut, quod eodem fere redit, quia carere illis poſſumus, omittant.

Tantam vero horologiorum varietatem tam breuiter explicare non liceret, niſi conditiones angulorum, acutine ſint, an obtuſi, linearum, vtrum ad has partes ca-

 dant,

dant, an ad illas, ex positiuarum et negatiuarum quantitatum legibus possent diiudicari. Quod cum praecipuum habeant formulae analyticae, et quantitatum oppositarum proprietates, ad lineas trigonometricas nostro demum tempore diligentius applicatae, facile intelligitur, si noui quidpiam praestando operae pretium fecerim, his doctrinis id deberi, de quibus alii eadem tractantes non cogitarunt.

PARS I.

FORMVLAE ANALYTICAE.

Prop. I.

Recta sibi plana BC; AB; fig. 1. secentur ab obliquo quodam, cuius data sit positio ad vnum rectorum; quaeritur inde positio eiusdem ad alterum rectorum.

Sol. 1. Secent se recta plana in BE; quae detur positione, deturque positione DF; obliqui plani, sectio cum recto AB; item F punctum, in quo intersectioni rectorum occurrit, et BFD, angulus, quem cum ea continet. Dico: *primo* F; esse etiam in sectione eiusdem obliqui cum recto BC. Nam haec sectio est in plano BC; adeoque, vt accidit rectis omnibus in eodem plano exsistentibus, rectae BE, planis AB; BC; communi vel occurrit, vel parallela est, quod habetur pro occursu ad distantiam infinitam. Quo posito, sectionis plani obliqui et BC, occursus cum BE; est in horum planorum vtroque et etiam in BA, in quo est BE; Er in vtroque rectorum BC; BA, et in obliquo simul, er. in BA et obliquo simul, er. in sectione obliqui cum BA, er. in DF, er. in ipsarum BE, DF concursu.

2. Ipsi DF, in BA plano, perpendicularis sit DB, occurrens rectorum sectioni in B. Item in obliquo plano sit ipsi DF perpendicularis DG, plano BC in G occurrens, erit BDG inclinatio data, obliqui ad AB, daturque ratio DB: GB quam pono $= 1 : p$. Nam ob FDG; FDB; rectos, planum anguli inclinationis rectum est ipsi FD, (Eucl. 4; XI) hincque planis, BA et obliquo; (18; XI). Ergo planorum, anguli inclinationis et BC sectio BG, recta est plano BA (19; XI) vnde GBD, GBF recti sunt. Porro G, F, sunt simul in obliquo plano, et in recto BC, Er. GF est horum planorum sectio.

3. Ob angulum datum BFD, dabitur ratio FB: BD $= 1 : m$ eritque p tangens anguli inclinationis dati, et m sinus anguli BFD, quem sectiones planorum, obliqui cum AB; et rectorum, continent.

4. Sit

4. Sit DI in plano BA ipſi BE perpendicularis, erit DI etiam perpendicularis, rectae in plano BEC ad BE per I perpendiculari, vtpote continens cum hac recta planorum BA, BEC inclinationis angulum, qui rectus eſt. Igitur DI recta eſt plano BC (4; XI) adeoque perpendicularis rectae IK, ex I in BC plano, perpendiculari ad GF, ſectionem recti BC et obliqui. Iungatur DK, erit DKF rectus. Nam propter DIK, DIF, IKF, rectos, erit $DKqu = DIq + IKq = DFq - IFq + IFq - KFq$; Igitur DKI erit obliqui plani ad BC inclinatio et GFB angulus ſectionis planorum rectorum cum ſectione obliqui et BC. Quae duo quaeruntur.

5. Primum er. quaeratur ratio DI; IK. Dic $FB = x$, eſt $BD = mx$; et p. BD ſeu $BG = mp. x$, $DF = x\sqrt{(1-mm)}$ et $\frac{BD.\ DF}{BF}$ ſeu DI $m.\sqrt{(1-mm)}.\ x$ et $\frac{BDq}{BF}$ ſeu $DI = m\sqrt{(1-mm)}.\ x$ et $\frac{BDq}{BF}$ ſeu $BI = mmx$; et $\frac{DIq}{BI}$ ſeu $IF = (1-m^2)\ x$.

Item $\sqrt{(FBq + BGq)}$ ſeu $FG = x\sqrt{(1+m^2p^2)}$
Tandem $\frac{FI.\ BG}{FG}$, ſeu $IK = \frac{mpx.\ (1-mm).}{\sqrt{(1+m^2p^2)}}$ Vnde
$DI : IK = \sqrt{(1+mmpp)} : p\sqrt{(1-mm)}$. Eſt vero anguli inclinationis obliqui plani ad BC planum, tangens, quam voco $P = \frac{DI}{IK} = \frac{\sqrt{(1+mmpp)}}{p\sqrt{(1-mm)}}$

6. Si $m = 1$; P fit infinita ſeu obliquum planum ipſi BC plano rectum. Caſus hic eſt anguli BFD recti, vbi $x\sqrt{(1-mm)}$ ſeu $FD = o$ coincidentibus BD; BF, ſed ſi $m = o$ fit $FD = x = FB$, hoc eſt FD eadem cum FB, aut, quod eodem recidit, illi parallela, vbi ſcilicet, abeunte F in infinitum infiniteſcit BF, et prae ea, BD parallelarum BF; DF; diſtantia finita euaneſcit. Hoc caſu ſit $P = \frac{1}{p} =$ cotangenti inclinationis ad BA planum, vt ſumma inclinationum rectum conſtituat.

7. Sit M = ſin GFB eſt

$$\frac{I.K}{FI} = \frac{mp}{\sqrt{(1+m^2p^2)}} = M.$$

8. Cum planorum rectorum ad obliquum ſimilis ſit relatio, patet fore $p = \frac{\sqrt{(1+MMpp)}}{P\sqrt{(1-MM)}}$ et $m = \frac{M.\ P}{\sqrt{(1+MMPP)}}$, quod et calculus oſtendit.

9. Poſ-

9. Poſſunt hae formulae et ſic exhiberi: Contineat ſectio planorum rectorum cum ſectione obliqui et primi rectorum, angulum $= \gamma$ cuius ſinum dixi m; ſed cum ſectione obliqui et ſecundi rectorum angulum Γ cuius ſinum dixi M; Inclinetur vero obliquum planum ad rectorum primum angulo δ cuius tangentem vocaui p; ad ſecundum vero rectorum angulo Δ cuius tangentem vocaui P: Denique angulus, cuius tangens eſt m p ſeu ſin γ. tang δ; dicatur λ; et Λ ſit angulus cuius tangens eſt M. P ſeu ſin Γ. tang Δ

His poſitis eſt, ex (7)

$$\text{Sin } \Gamma = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{ſec } \lambda} = \text{ſin } \lambda; \text{ ſeu}$$

$\Gamma = \lambda$ hoc eſt Γ eſt angulus cuius tang eſt ſin γ. tang δ.

$$\text{Et ex (5) tang } \Delta = \frac{\text{ſec } \lambda}{\text{tang } \delta . \cos \gamma} = \frac{1}{\cos \lambda . \text{ tang } \delta . \cos \gamma .}$$

$$\text{ſeu cot } \Delta = \cos \lambda . \text{ tang } \delta . \cos \gamma . \text{ eſt vero tang } \delta = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{ſin } \gamma} \text{ vnde}$$

$$\cot \Delta = \frac{\cos \lambda . \text{ tang } \lambda}{\text{ſin } \gamma}, \quad \cos \gamma = \text{ſin } \lambda . \cot \gamma .$$

Prop. II. Exemplum.

10. Sit BA meridianus, BC horizon, adeoque BE meridiana horizontis, DF ſectio plani obliqui cum meridiano, *meridiana plani*, GF ſectio plani obliqui cum horizonte, *horizontalis in plano ducta*, detur vero plani declinatio, et adeo p; item inclinatio, et adeo P; quaeruntur meridianae plani, et horizontalis in plano ductae, anguli cum meridiana horizontis, hoc eſt DFB; GFB; et adeo m; M;

Eſt ergo ex (5) $m = \frac{\sqrt{(PPpp - 1)}}{p\sqrt{(PP + 1)}}$

pro ſinu anguli DFB, meridianarum plani et horizontis; item ex (7) $M = \frac{\sqrt{(PPpp - 1)}}{P\sqrt{(pp + 1)}}$

pro ſinu anguli GFB inter meridianam horizontis et horizontalem plani.

11. In dato plano ad horizontem vtcunque obliquo, facile ducitur horizontalis, inveſtigaturque eius angulus cum meridiana horizontis. Sic datur M; facile etiam habetur inclinatio ſeu P; ex his ergo reperiuntur m; p; ſeu angulus meridianarum, et declinatio (8).

12. Angulus GFD datur ex ratione laterum Δ GFD; (2) Iam ex (5) $GD = mx\sqrt{(1 + pp)}$ et $\frac{GD}{GF}$ vel ſin GFD $= \frac{m\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{(1 + m^2 p^2)}}$. Eſt vero GFD angulus, in exemplo, meridianae et horizontalis plani obliqui.

Prop.

Prop. III.

13. Sit *in fig. 2.* AH meridiana horizontis, PH axis mundi, PD ex P in meridianam perpendicularis, adeoque PDH planum meridiani. Ad horizontem et meridianum detur positio plani BLC; *horologii* vocabo. Quaeritur angulus axis cum hoc plano; item sectio plani horologii, cum pleno eidem recto, per axem transeunte, linea *substylaris.*

Sol. Sit PI recta plano BLC; iunctae IH quaeritur positio, seu BHI angulus, si detur plani horologii sectio cum horizonte seu BHL; quaeritur etiam PHI, axeos ad horologinm inclinatio, estque HI substylaris.

14. Ob PI, PD, rectas planis horologii et horizontis (12, 13.) Planum per PDI (tale datur 2; XI) rectum est planis horologii et horizontis (18; XI) seu haec duo plana ipsi PDI recta sunt, vnde illorum sectio BL; eidem plano recta est (19; XI.) quae si occurrat PDI plano in K, erunt DKL, IKL, recti (def. 3; XI). Ductae igitur ex I; D; in BL rectam perpendiculares ambae cadunt in idem punctum K; seu, demissa IK in BL perpendiculari, est iuncta DK eidem BL perpendicularis.

15. Sit HE sectio plani horologii cum meridiano; *meridiana* horologii, cuius vtique punctum erit H, cum H sit in horizonte et in meridiano, ob AH meridianam horizontis, simul vero in BL, adeoque in BLC plano. Demissa in illam IE perpendiculari, iuncta PE, efficit PEH rectum. Nam $PEq = PIq + IEq$ (13.) Sed $EHq = IHq - IEq$ (per constr.) Ergo $pEq + EHq = PIq + IHq = PHq$; Ergo PEI est plani BLC angulus cum meridiano, seu *declinatio.* Nam pE est in meridiano, in quo sunt P et E.

16. Hic igitur significatus litterarum §. 10. sunt $P = \text{tang } IKD = \text{tang}$ inclinationis horologii ad horizontem; eam inclinationem voco I; est $P = \text{tang } I$.

$p = \text{tang } PEI = \text{tang}$ declinationis horologii a meridiano, quae declinatio, si dicatur D; est $p = \text{tang } D$

$M = \text{sin } AHB = \text{sin}$ anguli meridianae horizontis cum horizontali horologii; ille angulus dicatur S erit $M = \text{sin } S$

$m = \text{sin } EHD = \text{sin}$ anguli meridianarum horizontis et horologii, dicatur ille Q, est $m = \text{sin } Q$.

Horum duobus datis, dantur reliqua duo (10; 11) Datur quoque angulo GFD fig. 1. hic respondens BHE, linearum in plano horologii ductarum, meridianae et horizontalis (12.), eum dico V.

17. Formulae vero, in §. praec. citatae, ad negotium praesens ita transferuntur, et calculo trigonometrico vulgari aptantur.

Ex

Ex valore ipſius m §. 10; eſt $1 - m^2 = \frac{1 + p^2}{p.^2 (P^2 + 1)}$.

hoc eſt $\cos Q = \frac{\text{ſec } D}{\text{tang } D. \text{ ſec. } I} = \frac{1}{\text{ſin } D. \text{ ſec. } I} = \frac{\cos I}{\text{ſin } D}$

ſimiliter $1 - M^2 = \frac{1 + P^2}{P.^2 (p^2 + 1)}$, hoc eſt

$$\cos S = \frac{\text{ſec } I}{\text{tang } I. \text{ ſec } D} = \frac{\cos D}{\text{ſin } I.}$$

Ita dantur Q, S, ex data declinatione, et inclinatione, quod vſui eſt, ſi deſcribendum ſit horologium in plano, cuius D et I pro lubitu adſumuntur.

18. Si vero detur poſitione planum, immediate habetur facile inclinatio, et ducta in illo horizontalis refertur ad meridianam horizontis. In praxi igitur quaeri poſſunt Q, D, ex I; S; datis. Tunc vero eſt ex (17.)

$$\cos D = \cos S. \text{ ſin } I. \text{ et}$$

$$\cos Q = \frac{\cos I}{\text{ſin } D}$$

19. Vltima formula iam poſſet ſufficere reperiendo Q, quia datur D ex priore; ſed reperiri etiam poteſt formula, quae det Q immediate per S et I; ſic

$\text{ſin } Q^2 = \frac{\text{ſin } D^2 - \cos I^2}{\text{ſin } D^2}$. Huius valoris numerator eſt

$1 - \cos S.^2 \text{ ſin } I^2 - \cos I^2 = \text{ſin } I.^2 (1 - \cos S^2)$ Ergo

$\text{ſin } Q = \frac{\text{ſin } I. \text{ ſin } S}{\text{ſin } D}$; Vnde $\frac{\text{ſin } Q}{\cos Q}$, ſeu

$$\text{tang } Q = \frac{\text{ſin } I. \text{ ſin } S}{\cos I} = \text{tang } I. \text{ ſin } S$$

20. Ex 16; et 12; eſt

$$\text{ſin } V = \frac{m . \sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{(1 + mmpp)}} \text{ vnde } \cos V = \frac{\sqrt{(1 - m^2)}}{\sqrt{(1 + m^2 p^2)}}$$

$$\text{et ſin } \frac{V}{\cos V} = \frac{m \sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{(1 - mm)}}$$

$$\text{ſeu tang } V = \frac{\text{ſin } Q}{\cos Q} . \text{ ſec } D$$

$$= \frac{\text{tang } Q}{\cos D}$$

21. Huc

21. Huc vsque dicta pertinent ad ſitum horologii reſpectu meridiani et horizontis. Iam, ſi fig. 2. aptetur noſtris regionibus, vergunt HP, axis mundi, ſeu ſtilus horologii, HA meridiana horizontis, verſus boream; igitur ſitae ſunt horologii pars GHB ad orientem, GHL ad occidentem, reſpectu meridiani, in quo ſunt AH, HP; HE.

22. Sumantur igitur initio D; I; acuti, ſeu contineat horologium cum meridiano angulum acutum a borea verſus orientem; item cum horizonte, acutum verſus boream.

23. Hoc poſito, propter PEI=D (15) vergit EI ab E puncto in meridiano, verſus ortum, et hinc HI ſubſtylaris (13) ab H puncto in meridiano verſus ortum.

Hoc ſequitur ex D acuto, qualiscunque ſit I, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

24. Sit D rectus, ſeu horologium meridiano rectum;

Patet cadere I in HE, horologii meridianam.

25. Sit D obtuſus, ſeu angulus inter partes, meridiani EAH, et horologii EAB, contentus, ſit obtuſus, erit acutus, quem continent partes meridiani EHA, et horologii EHL, Ergo perpendiculum ex P, puncto meridiani, in horologium demiſſum, cadit in partem EHL horologii; In hac igitur parte ſitum eſt I punctum, tunc ergo ſubſtylaris vergit ab H puncto meridiani verſus occidentem.

26. Prout igitur declinatio, ſenſu §. 22; 25; accepta, eſt acuta vel obtuſa, verget ſubſtylaris HI verſus ortum aut verſus occaſum, hoc eſt, ſi intelligatur HB ſemper vergere verſus ortum, eſt BHI acutus aut obtuſus.

Haec pendent ſaltim a declinatione plani, nullo modo ab inclinatione.

27. Plani cuiusuis, vt BLC, duae ſunt *facies*, quarum vna, ſi ſermo ſit de plano horologii, obuerſa eſt rectae HA tendenti verſus punctum boreale horizontis, altera, rectae HF, tendenti verſus horizontis punctum auſtrale. Ita meridiani facies vna eſt orientalis, altera occidentalis. Angulus vero duarum ſuperficierum manifeſte continetur inter facies ſibi obuerſas, puta hic angulus horologii cum horizonte continetur, vel inter faciem horologii rectae HA obuerſam, et ſuperiorem horizontis, a BL verſus boream extenſam, vel inter horologii faciem, rectae HF obuerſam, horizontis vero ſuperiorem, a BL verſus auſtrum extenſam. Hi duo anguli, cum ſimul duo rectos efficiunt, ponatur prior illorum initio acutus (22) erit pro eodem obtuſo, ſeu horologio boreae reſpectu *reclinato*, tang I negatiua.

28. Si angulus inclinationis, initio acutus, creſcat, gyrante horologio circa BL rectam; creſcet tang I; fietque infinita pro horologio verticali; et poſt, negatiua decreſcens, vsque ad nihilum, plano BLC cadente in horizontem verſus auſtrum reſpectu BL rectae.

29. Si declinatio (26.) initio acuta creſcat, gyrante horologio circa HE rectam, creſcet tang D, fietque infinita, pro horologio meridiano recto, et poſt, negatiua decreſcens vsque ad nihilum; parte horologii EHB incidente in meridiani partem, ab HE verſus auſtrum extenſam. Gyrum vlterius continuare, eſſet: plani BL partem

EHL ad orientem, reſpectu meridiani, transferre. Igitur, ſic nil noui ageretur, vt omnis varietas ſitus horologii dictis exhauriatur.

30. Ex (18.) eſt coſ Q eiusdem ſigni cum coſ I. Igitur angulus DHE eſt acutus, rectus, obtuſus, prout eſt inclinatio.

31. Ex (17.) eſt coſ S eiusdem ſigni cum coſ D. Ergo BAH angulus eſt acutus, rectus, obtuſus, prout eſt declinatio.

32. Si S=o, cadit HB ſuper HA (16). Quodſi igitur horologii planum ſit a meridiano diuerſum, ſecans tamen illum per hypotheſin in HB, recta, ſuper HA cadente, non poteſt ſecare meridianum adhuc in alia recta, igitur non poteſt HE ab HA diuerſa eſſe, igitur eſt quoque EAH, et adeo Q=o

Fit ſcilicet planum horologii, inclinatum ſuper meridiana horizontis; vbi patet, inclinationem eſſe complementum declinationis. *Horizontalia declinantia* vocat *Sturm: Gnomon: Welper: P. II. c. 1.*

Si hoc horologium eſt in ipſo meridiano, fit I=R et D=o.

33. Ex formulis cos S (17.) cos Q (18.) ſequitur cos S.

$$\cos Q = \frac{\cos D.\ \cos I.}{\sin I.\ \sin D} = \cot D.\ \cot I.$$ Igitur

$$\tan g\ D.\ \tan g\ I = \frac{1}{\cos S.\ \cos Q}$$ vnde

$$\tan g\ D = \frac{1}{\cos S.\ \cos Q}.\ \cot I$$

Iam, niſi ſint ſimul cos S et cos Q; ſinguli=1, (maiores autem fieri non poſſunt) ſemper eſt tang D maior quam cot I; nunquam minor.

Itaque, ſumtis tam S, quam Q, recto minoribus, vt coſinus, item tangentes aequationis vltimae, ſint omnes quantitates poſitiuae, perſpicuum eſt, fore D + I recto maiorem, nunquam minorem, aequalem vero, ſi tam S, quam Q ſimul euaneſcant.

Si alteruter angulorum S vel Q eſt recto maior, erit etiam D vel I recto maior (26; 27;) Itaque tunc I+D recto maior eſt. Et multo magis, ſi tam S, quam Q ſint recto maiores.

Inclinatio igitur et declinatio ſimul, conſtituunt ſummam, nunquam recto minorem.

34. Quae ſequuntur, pertinent ad *poſitionem ſtili.*

35. Dicatur E, *eleuatio poli*, angulus vero AHE — AHP = PHE dicatur H; eſt

$$\sin H = \sin Q.\ \cos E - \cos Q.\ \sin E.$$
$$\cos H = \sin Q.\ \sin E + \cos Q.\ \cos E.$$

36. Dicta

36. Dicta HP = a; eſt PD = a. ſin E; DH = a. cos E.

37. Cum ſit PEH rectus (15) eſt PE = a. ſin H; EH = a. cos H.

38. Cum ſit PEI declinatio (15) eſt

PI = PE. ſin D = a. ſin H. ſin D.

IE = PE. cos D = a. ſin H. cos D

39. Subſtylaris continet cum meridiana plani angulum IHE cuius tangens eſt $\frac{EI}{EH} = \frac{\text{ſin H. cos D}}{\text{cos H}}$ = tang H. cos D. Dicatur K, *angulus inter ſubſtylarem et meridianam plani;* eſt tang K = tang H. cos D.

40. IH = HE. ſec K = $\frac{\text{a. cos H}}{\text{cos K}}$

41. KH = DH. cos S = a. cos E. cos S.

42. Hinc habetur angulus KHI, quem continet *ſubſtylaris cum horizontalis horologii parte verſus ortum vergente.* Eius anguli coſinus eſt $\frac{KH}{IH} = \frac{\text{cos E. cos S. cos K}}{\text{cos H}}$

Cum horizontalis in plano horologii, ſimpliciore operatione ducatur, quam meridiana; non ſuperfluus eſt §. 42, poſt 39. Inſeruiunt etiam hae duae formulae ſibi mutui examinis loco.

43. *Angulus ſtili cum plano horologii PHI,* ſinum habet $\frac{PI}{PH}$ = ſin H. ſin D.

44. Ita dantur quaeſita (13.)

Prop. IIII.

45. Sint omnia, vt in Prop. III. quaeruntur, poſitio aequatoris ad horologium; et lineae horariae in horologio.

Sol. Sit PA, ipſi HP perpendicularis in meridiano occurrens horizonti in A; et per A ducatur QAZ in horizonte, ipſi AH perpendicularis; erit QA recta meridiano; vnde QAH, QAP ſunt recti. Igitur
$QHq = QAq + AHq = QPq - APq + APq + PHq = QPq + PHq$ vnde, ſumto Q ad libitum, eſt QPH rectus, ſicque planum per QZ, AP, rectum axi mundi HP, ſeu planum aequatoris.

46. Erit AP = a. tang E; AHa. ſec E = $\frac{a}{\text{coſ E}}$, $\frac{PD^2}{DH}$ ſeu

AD = a. ſin E. tang E.

47. Occurrat QAZ ipſi LB in Z, eſt HZ = AH. ſec S (16) = $\frac{a}{\text{cos. E. cos S}}$

et AZH = R — S.

48. Pro

48. Producatur AP donec ipsi HE occurrat in G; est in triangulo PHG; angulus PGH = R — H; Vnde PH: HG = cos H: 1 et HG = $\frac{a}{\cos H}$.

49. Iuncta ZG, erit sectio aequatoris cum horologico.

50. Propter PI rectam horologio, et PH rectam aequatori, est planum PHI rectum, tam horologio, quam aequatori. Vnde planorum horologii et aequatoris, ipsi PHI rectorum, intersectio GZ, ipsi PHI recta est. Producta igitur substylaris HI, occurrat ipsi GZ in V; et ducatur PV; erunt GVH; GVP recti, et PVI, erit aequatoris inclinatio ad horologium.

51. Ob P et GZ in aequatore, erit PV in aequatore, igitur HPV rectus.

52. Vnde propter PI perpendicularem in HV; est PVI = IPH, vt sit PVI complementum ipsius PHI, reperti (43.).

53. Angulus HGZ est complementum anguli GHI, reperti (39.). Igitur: *angulus contentus inter meridianam horologii, et sectionem aequatoris ac horologii*, est R — K

54. $HV = HG.\ \cos K\ (39.) = \frac{a.\cos K}{\cos H}$ (48) et $VG = HG.\ \sin K = \frac{a.\sin K}{\cos H}$

55. $PV = HV.\ \sin PHI = \frac{a.\cos K}{\cos H}.\ \sin H.\ \sin D\ (43.) = a.\ \cos K.$ tang H. sin D.

56. Igitur, cum sit PG = a. tang H dicto PGV = G; est $\sin G = \frac{PV}{PG} = \cos K.\ \sin D.$ Vel:

$$\text{tang } G = \frac{PV}{VG} = \frac{\cos K.\ \text{tang } H.\ \sin D.\ \cos H}{\sin K}\ (54;\ 55;)$$

$$= \frac{\sin H.\ \sin D}{\text{tang } K} = \frac{\sin H.\ \sin D}{\text{tang } H.\ \cos D}\ (39.) = \cos H.\ \text{tang } D;$$

Est ergo tang G = cos H. tang D.

In praxi haec formula praeferenda est priori, cum priorem ingrediatur K; definiendus per H, hic adhibeatur H ipse.

57. Iam sit APQ angulus horarii cuiusuis, = T et producta QP occurrat ipsi GZ in S, vt sit GPS = T; *quaeritur* GS?

Erit igitur sin PSG: sin SPG = PG: GS;

seu $GS = a.\ \frac{\text{tang } H.\ \sin T}{\sin (T + G)}$

58. In

58. In triangulo SHG, ex datis HG, GS, et angulo intercepto, si libet, computari potest SHG, *angulus lineae horariae cum meridiana horologii.*

59. In 57. erat T angulus in aequatore pro hora antemeridiana. Sit in fig. 3; APq angulus pro hora pomeridiana, ceterum = T; producta vero qP occurrat ipsi GZ in f; erit in triangulo GPf; angulus PGf = 2R — G; hinc Gfp = G — T et $\frac{PG.\ \text{sin}\ fPG}{\text{sin}\ PfG}$ seu

$$Gf = \frac{a.\ \text{tang}\ H.\ \text{sin}\ T}{\text{sin}\ (G - T)}$$

Scilicet angulus horarius antemeridianus et pomeridianus, sunt quantitates oppositae, vnde aequipollent sibi, illum addere, hunc subducere. Ipse sin T pro angulo pomeridiano est oppositus sin T pro antemeridiano; quo efficitur, vt Gf fiat opposita ipsi GS, in partes scilicet oppositas tendens.

60. Crescente T pomeridiano, crescit Gf et infinitescit vbi T = G, deinde fit negatiua. Ex fig. 3. patet crescente APq donec fiat = ZGA, crescere Gf, et infinitescere, vbi vero fit APq ipso ZGA maior, concurrere qP cum GZ ad partes Z respectu G puncti.

Similiter in §. 57. si sit T + G duobus rectis aequalis, fit GS infinita, negatiua vero si T + G maior 2 R. Haec definiunt positionem *linearum* horariarum; quae vero illarum partes *vmbra* tegantur, facile in quouis casu perspicitur.

61. Huc vsque dicta aptantur fig. 2; vt describitur 21; 22; addita hac conditione: esse AHE maiorem ipso AHP (35) seu Q maiorem ipso E; quod, ob E recto nunquam maiorem, semper contingit, si sit I rectus vel eo maior (30), si vero sit I acutus, et adeo Q; debet esse sin Q maior quam sin E, sicque cos Q minor quam cos E; hoc est, ex (18) $\frac{\text{cos}\ I}{\text{sin}\ D}$ minor quam cos E.

62. Hinc si sit $\frac{\text{cos}\ I}{\text{sin}\ D} = \text{cos}\ E$; coincidunt HE, HP; si vero sit $\frac{\text{cos}\ I}{\text{sin}\ D}$ maior quam cos E; cadit HE intra angulum AHB; Tunc fieret formula sin H (35) negatiua, sinus scilicet anguli negatiui. Sed, ne opus sit, hunc angulum tanquam negatiuum considerare, et operosius inuestigare, quae inde consequantur, vt circa angulum K (39) cet: patet rem omnem ita absolui posse: In fig. 2. axi HP obuertebatur horologii facies *borealis*, iam vero eidem axi obuertitur facies *australis*. Sumatur itaque et hic H positiuus, vt sit iam

$$\text{sin}\ H = \text{sin}\ E.\ \text{cos}\ Q - \text{cos}\ E.\ \text{sin}\ Q$$

lineae vero omnes in plano horologii ductae, iam cogitentur, spectari in eius facie australi.

63. Si

63. Si ſit deſcribendum horologium in facie auerſa ab HP, puta in auſtrali fig. 2. aut in boreali (62.), patet cogitari poſſe PH inde ab H verſus polum auſtralem productam, item horarias debito modo productas.

Angulus ſtili cum plano, (43) ſemper intelligitur PHI; eius igitur ſtili producti, qui iam adhibetur angulus, eſt illius (43) ſupplementum ad 2 R, et ſubſtylaris eſt IH producta.

64. Quae ceterum quaeri poſſunt de poſitione linearum, omnia diiudicantur ex angulorum conditionibus, qui, an acuti, an obtuſi ſint, ex coſinuum aut tangentium ſignis innoteſcit.

65. *Conſtructio horologii.*

I. Dati ſunt *Inclinatio* I, Declinatio D, ex his computantur AHB = S; AHE = Q, ſic

$$\cos S = \frac{\cos D}{\sin I} \quad (17.)$$

$$\cos Q = \frac{\cos I}{\sin D.} \quad (18).$$

II. Vel, ſi dentur I, S; inde habentur

$$\cos D = \cos S. \sin I$$
$$\tang Q = \tang I. \sin S \quad (19.)$$

III. BHE = V datur ſic (20)

$$\tang V = \frac{\tang Q}{\cos D}$$

IV. $H = \pm Q \mp E$ (35; 62;)

V. EHI = K ex (39) ſic

$$\tang K = \tang H. \cos D$$

KHI ex (42.) ſic

$$\cos KHI = \frac{\cos E. \cos S. \cos K.}{\cos H}$$

VI. Angulus ſtili cum horologio (43)

$$\sin IHP = \sin H. \sin D.$$

Pro ſitu aequatoris ad horologium et lineis horariis.

VII. $HG = \frac{a}{\cos H}$ (48)

VIII. Angulus HGZ = R — K (53)

VIIII. PGS = G; tunc ex (56)

$$\tang G = \cos H. \tang D.$$

X. Dicto

X. Dicto angulo horario in aequatore, T; eſt pro hora antemeridiana

$$GS = \frac{\text{a. tang H. ſin T}}{\text{ſin (G + T)}} \quad (57)$$

pro pomeridiana

$$GS = \frac{\text{a. tang H. ſin T}}{\text{ſin (G — T)}} \quad (59)$$

66. In formulis exhibitis, ſinus totus adſumtus eſt = 1; Quo igitur poſſint ſecundum illas calculi inſtitui, adhibendo logarithmos tabulares, vel: formulae reducendae ſunt ad radium logarithmorum tabularium, vel linearum trigonometricarum logarithmi tabulares ſinguli imminuendi ſunt numero 10; logarithmo radii tabularis. Hic commodius videtur, prius facere, quod peragitur, ad hoc ſolum attendendo, dimenſiones per ſinum totum ita eſſe ſupplendas, vt opus eſt, ſi ſinus, tangentes, cet: lineae eſſe ſtatuantur. Ita $\cos Q = \frac{\cos I}{\text{ſin D}}$ (18) reducitur ad numeros tabulares, ſcribendo $\cos Q = r \frac{\cos I}{\text{ſin D}}$ et intelligendo per r, ſinum totum tabularem, per ſinus, et coſinus; tabulares.

67. Calculi exemplum hoc adiicere liceat:

Sit horologium deſcribendum in plano, cuius *Inclinatio* I = 70.°
Declinatio D = 25°
Sit *eleuatio poli* = E = 51° 32′
Hic pro inueniendo Q eſt ex (18)

log r + log cos I = 19, 5340517
log ſin D = 9, 6259483.
log ſin Q = 9, 8091034.
Q = 35° 58′

Pro inueniendo S; (17.)

10 + log cos D = 19, 9572757
log ſin I = 9, 9729858
log cos S = 9, 9842899.
S = 15° 19′.

Si vero detur S = 15° 19′; et I = 70° calculus peragitur ex (19) (18) ſic

log ſin S = 9, 4218566
log tang I = 10, 4389341.
log tang Q = 9 8607907.
Q = 35° 58′, vt ante

log

log cos S = 9, 9842935
log ſin I = 9 9729858
log cos D = 9, 9572893.
D = 24.° 59′ +

Pro inueniendo V eſt ex (20)

10 + log tang Q = 19, 8607907
log cos D = 9, 9572757.
log tang V = 9, 9035150.
V = 38° 41′ +

Ex (63) eſt
Q = 35° 58′
E = 51° 32
H = 15° 34′

et quae in plano horologii fiunt, ſpectantur in eius facie auſtrali (62)

Pro angulo K (39)

log tang H = 9, 4449468
log cos D = 9, 9572757
log tang K = 9, 4022225
K = 14° 10′

Si quaeratur KHI (42)

log cos K = 9, 9865872
log cos S = 9, 9842935
log cos E = 9, 7938317.
29, 7647124.

10 + log cos H = 19, 9837701
log cos IHK = 9, 7809423.
Hinc IHK = 52° 52′ +

Angulus ſtili cum horologio (43.)

log ſin D = 9, 6259483
log ſin H = 9, 4287169
log ſin IHP = 9, 0546652.
IHP = 6° 31′.

Pergo

Pergo ad positionem aequatoris, et horariarum Prop. IIII.

Pro lineis computandis sumo a (36) = 10000.

Longitudo rectae HG (48)

$$10 + \log a = 14,$$
$$\log \cos H = 9,9837701$$
$$\log HG = 4,0162299$$
$$HG = 10381 -$$

GV ducitur in angulo HGV = R — K (32)

$$HGV = 75^\circ\ 50'.$$

VGP = G datur ex (55), et adhibendo formularum ibi repertarum secundam est

$$\log \cos H = 9,9837701$$
$$\log \operatorname{tang} D = 9,6686725$$
$$\log \operatorname{tang} G = 9,6524426$$
$$G = 24^\circ\ 11'.$$

Pro ducendis lineis horariis.

Quaeratur ea, quae respondet horae nonae antemeridianae. Igitur

$$T = 45^\circ,\quad T + G = 69^\circ\ 11'.$$

$$\log a + \log \sin T = 13,8494850$$
$$\log \operatorname{tang} H = 9,4449468$$
$$23,2944318$$
$$10 + \log \sin (T + G) = 19,9706826$$
$$\log GS = 3,3237492$$
$$GS = 2107.$$

capienda a G puncto versus occidentem.

Formulae ad horologiorum genera adplicatae Horologia verticalia.

68. Hic I = R; cos I = 0; sin I = 1. Itaque

cos Q = 0 (17) Q = R

cos S = cos D, S = D

tang V infinita (20) V = R

H = R — E (35)

tang K = cot E. cos D (39)

Propter BHI = R, est KHI (42) = R — K

quod etiam ex huius anguli formula computatur.

Angulus ſtili cum plano horologii ſinum habet cos E. ſin D. PD; DH; cum non pendeant a ſitu plani, habentur (36)

$$IH = \frac{\text{a. ſin E}}{\cos K} \quad (40)$$

$$IP = \text{a. cos E. ſin D} \quad (37)$$

Situs ad aequatorem Prop. IIII.

Rectae (46) ſemper manent eaedem.

$$HG = \frac{a}{\text{ſin E}} \quad (48)$$

$$\text{tang G} = \text{tang D. ſin E} \quad (56)$$

$$GS = \frac{\text{a. cot E. ſin T}}{\text{ſin (T + G)}} \quad (57.)$$

$$Gf = \frac{\text{a. cot E. ſin T}}{\text{ſin (G — T)}} \quad (59)$$

Pro horologio occidentali D = 0; pro orientali D = 2R (21; 25;) ſtilus autem cadit in planum horologii, cui incommodo, quomodo ſubueniatur notum eſt.

69. Horologia pro quibus D = R.

Q = I; S = R (17) V = R (20)
H = ± I ∓ E (35; 63) K = o. (39)
KHI = R (39) Angulus ſtili (43)
= H, $HG = \frac{a}{\cos H}$ (48)

$$G = R \ (56); \quad GS = \frac{\text{a. tang H. ſin T}}{\text{ſin (R + T)}} \quad (57.)$$

Sed ob ſin (R + T) = cos T, eſt GS = a. tang H. tang T; et Gſ ei oppoſita.
Si dicatur HG = b; eſt a = b. cos H et GS = b. ſin H. tang T. b
Itaque, anguli HGS inter *meridianam*, *et horariam horologii*, ſeu *anguli horarii in horologio*, tangens eſt $\frac{GS}{b}$ = ſin H. tang T

Dicatur PI = c; eſt $a = \frac{c}{\text{ſin H}}$ (38) vnde a. tang H. tang T;

$$\text{ſeu } GS = \frac{\text{c. tang T}}{\cos H}$$

Horolo-

Horologium polare.

70. Species eſt (69) vbi I = E; H = o, HG = a; ſtilus proprie cadit in planum horologii; Si vero ſtatuatur ei parallelus in diſtantia c; fit GS = c. tang T

Horizontale.

71. Species (69), ſi cogitetur planum BLC circa BL ipſi AH perpendicularem volui imminuta inclinatione vſque ad nihilum. Itaque I = o; H = E; GH congruit ipſi HA, et tangens anguli horarii in horizonte eſt ſin E. tang T.

Aequinoctiale.

72. Vt conſideretur tanquam ſpecies (69) aduertendum eſt, I vt hic ſumitur (27) eſſe, hoc caſu ſupplementum eleuationis aequatoris ad 2R adeoque = 2R — (R — E) = R + E. Ergo H ſeu IE = R, IHP = R, HG infinita, cum planum aequatoris, plano ſibi parallelo non occurrat, ſimiliter GS infinita ſed anguli HGS tangens = T.

Verticale boreale.

73. Habet in (69) I = R; H = R — E; HG = $\frac{a}{\text{ſin } E}$; GS = a. cot E. tang T

74. Sed quoniam librum de Gnomonica ſcribere, non eſt animus, haec ſufficiant.

VIII.

Eorum, quae lacrymis vitriis accidunt, noua quadam ratione explicandorum tentamen.

d. 7. Aug. 1762.

Phaenomenorum, inde a ſaeculo fere cognitorum, explicationem illis quae legi, non omnino ſimilem, Societati Regiae exhibere liceat. Pertinebunt, quae dicturus ſum, ad guttas illas fluentis vitri, quae aquae inſtillatae ſubito riguerunt, *lacrymas* phyſici appellauere, et a regione, vnde primo forte adlatae ſunt, *Batauas*. Illis, quae accidunt, notiora ſunt, quam vt eorum enarratione, vel leuiter in phyſica verſatis, moleſto eſſe mihi liceat; ſupereſſe vero crediderim in quibus ingenium et induſtriam non inutiliter plane collocet cauſas inueſtigaturus. Nam vt nihil dicam de commentis illis, quae dies iam deleuit, vt: vitrum ab aethere irreunte diſpergi, et quae ſimilia ſunt, ante paucos annos dignam acumine ſuo peritiaque indicauit quaeſtionem cel. Nollet. A cuius ſolertia aliquantum diuerſam, ſi iam edam, facile

 quiuis

quiuis videbit, non contradicendi ſtudio id fieri, ſed quod ad augendam naturae cognitionem pertinere exiſtimem, eiusdem euentus cauſas a pluribus examinari.

Sunt autem lacrymarum phaenomena eadem, quae naſcerentur ab elaſtrorum intra inuolucrum quoddam vehementer compreſſorum magna copia, vbi, rapto inuolucro, ſingulisque elaſtris ſubito ſe reſtituentibus, manifeſtum eſt, a mutuis aliorum in alia actionibus omnia diſſilitura. Inuolucri loco, ſi exteriorem lacrymae ſuperficiem nomines, maſſam interiorem ex partibus, quae elaſtris compreſſis reſpondeant, compoſitam fingas, facile quam ſimiles ſibi ambo hi caſus ſint, intelliges.

Haec eo nos ducunt, vt quaeramus, ſitne probabilis ſententia, interiorem lacrymam ex materia elaſtica, eaque compreſſa conſtare, id vero, quod comprimit, aut ſaltim, vt duret ſtatus compreſſionis, efficit, rapta lacrymae cauda, auferri.

Vitrum elaſticum eſſe, non eſt, quod pluribus argumentis oſtendam. Nam praeter ſonum, quem corpora alia, quam elaſtica, non edunt, tenues laminae vitreae, et ſubtilia fila vitrea, flexa reſiliunt. Flecti quidem ſolidum, poſtquam refriguit vitrum, non, niſi exiguae craſſitiei ſit, poteſt; ignitum vero, quod ex catino hauriunt, antequam ſolideſcat, totum molle eſt, vt maior etiam eius maſſa vi cuiuis externae obediat, ipſoque artificis ſpiritu, vt ferrum ab igne rubens fabri malleo, ducatur. Igitur circumſpiciendum eſt, ſitne vis aliqua, quae frigidae immiſſam liquidi fere adhuc vitri guttam comprimat, compreſſam vinculis, cauda fracta demum rumpendis conſtrigat. Hanc autem vim in illo frigore, quo ſubito velut conglaciatur gutta reperire mihi videor. Notum eſt, quae vſui deſtinantur vitra, in furno calidiori, quam vt animal in eo viuere poſſit, paullatim refrigerari. Hic calor ſenſim ſenſimque ex vitro migrat in aerem circumfuſum, paullo minus ſaltim, quam vitrum ipſum erat, calidum; abire autem calorem primum ex partibus ſuperficiei proximis conſtat, igitur, ea menſura, qua calor ex his partibus abit, ſuccedit in illas, calor qui ante interioris vitri partes agitauerat, ſicque paullatim integra vitri maſſa aequabiliter refrigeſcit. Hic, poſtquam omnia riguerunt, nihil compreſſi, nihil tenſi ſupereſt, cum omnia tunc cum adhuc mollia erant, ſat temporis habuerint, in illum ſtatum, quem ſingulae partes adfectant, ſe componendi. Si male refriguerit vitrum, aeri libero expoſitum citius vel tardius rumpitur, indicio ineſſe partes, quae mutationem ſitus ſui adfectent, et quod in republica facerent ciues, ad moliendas res nouas proni, exiguo auxilio externo accedente, omnia diſcidiis impleant. Igitur frigori, quod vitro ſubito adplicatur, ineſſe vim partes inaequaliter comprimendi, aut tendendi, in eaque loca cogendi, e quibus, quam primum fieri poteſt, exire conantur, docet haec abortiuorum vitrorum hiſtoria, et velut ad pathologiam vitri, quae Phyſiologiam illuſtret, pertinens.

Cogitemus iam, fluentem guttam viſciditate tamen ſua cohaerentem, quae in aquam delabitur. Tanta frigidae copia, ſuperficiei vndiquaque adplicata, non poteſt non calorem ex partibus ſuperficiei proximis ſubito euocare, et velocius multo, quam

in

in eius abeuntis locum ſuccedere poſſit, quo interiora guttae adhuc agitantur. Superficies igitur guttae omnis, quod vitro calorem amittenti contingit, in ſpatium anguſtius contrahitur, interior maſſa, calore adhuc mollis, et tantum non fluida, cedit ſuperficiei coeunti, itaque comprimi ſe patitur. Vt ne reſtituat ſibi volumen prius, vbi paullatim frigore rigeſcit, ſuperficie, ante iam frigida et indurata, impeditur. Habet igitur gutta compreſſi vitri velut nucleum quendam, cuius corticem, quem appellare licet, apte cogitabimus, ex filis eo ſenſu, quo longitudinem guttae metimur, iuxta ſe poſitis, et in cauda coeuntibus coagmentatum. Nam vitri fluidi maſſa omnis, dum pondere ſuo deſcendere conatur, ex ſuperficie ſua fila ducit, quibus inſtrumento, quo ſuſtinetur, adhaereat, haecque fila, guttam ſuſtentantia, ſurſum ducuntur, hoc eſt iuxta longitudinem guttae deſcendentis, deorſum vergentem. Vbi in caudam coeunt fila, implicari ſibi mutuo, aliaque circa alia contorqueri, cuiuis qui pondus ex fune pendulum deſcendens cogitat, fiet manifeſtum. Ita crediderim effici, tum ipſo rigore filorum, quae extima guttae componunt, tum illis, quas dixi ſibi circumplicatorum gyris, vt compreſſus nucleus in eo, in quo eſſe non amat, ſtatu contineatur. Abrupta vero cauda, et quod fieri debere notum eſt, prope ſuam e corpore guttae originem, ille filorum ſuperficialium nexus ſubito tollitur. Non enim iuxta longitudinem ſuam cohaerent fila, velut glutine aliquo, vt continere poſſint vim ab interioribus verſus exteriora tendentem, ſed quod eo, quem dixi, modo in cauda ſibi iunguntur. Globos ita funibus circumueſtire norunt, miſſilium nitri et ſulphuris accenſi iaciendorum artifices, vt iuxta longitudinem funes non iungantur; extremis ſuis ſaltim cohaereant, et ſic receptaculum forment, cum quo tuto vel maximi ponderis globus attollatur. Funes cum filis illis guttae ſuperficialibus, globum cum maſſa vitrea interiore comparare licet, niſi quod globus, pondere ſuo, vnice deorſum tendit, maſſa vitrea, e latere ſuo, quaquauerſam.

Ex his crediderim, omnia, quae lacrymae contingunt, facile explicari. Nam ruptis ſuperficiei exterioris vinculis, diſſilient partes compreſſae interiores, idque continget, ſiue cauda frangatur, ſiue, quod etiam aliqui experti ſunt, attritu, continuum ſuperficiei vbicunque libet, ſoluatur. Si vero carbonibus impoſita, canduerit gutta, et deinde paullatim refriguerit, patet, emollitam calore ſuperficiem ceſſiſſe maſſae interiori, vt haec expandere ſe potuerit, et calore paullatim recedente, omnia in illum, in quo durare poſſunt, ſtatum ſe compoſuiſſe, igitur iam nullo diſſiliturae guttae periculo cauda frangitur.

Ex hoc ſequitur, vt gutta haec, poſtquam candefacta, refriguerit, maius volumen occupet, quam antea, de quo voluminis augmento, niſi forte nimis exiguum eſt, ponderatione in aqua ſtatui poſſet, ſi cui theoriam hanc experimentorum examini ſubiicere, operae pretium videretur.

Perſimilia his ſunt phialarum, quas Bononienſes dicunt, phaenomena. Nam et illae non in aqua, ſed in aere frigidiori ſubito riguerunt. Igitur quae cauo illorum

propiores ſunt partes, quod diutius calide manſerant, ab exteribus, conuexo propioribus, comprimuntur. Tremoribus in cauo excitatis, noua quaedam, illa ſcilicet oſcillationum natarum vis, ad partium compreſſarum elaterem accedit, vnde conſequuntur ab aucta vi partium internarum, phaenomena, quae in lacrymis poſt rupta vincula externa ſequebantur. Illa tamen phialarum debiliora multo ſunt, quoniam minus ſubita fuit refrigeratio, minusque adeo vehemens compreſſio. Rotunda et mollia corpora iniecta, tremores non excitant, igitur phaenomena, quae lapillos et corpuſcula anguloſa et duriora iniecta ſequuntur, non producunt. Sed in re adeo clara plura verba facere, quam ad explicandam ſententiam pertinent, eſſet de veſtra perſpicacia, Auditores et Iudices, minus honorifice ſentire.

VIIII.

De quaeſtione, quot ſphaerae aequales circa datam mediam poni poſſint, vt omnes illam, et circumpoſitarum ſibi vicinae, ſe mutuo tangant.

d. 4. Decemb. 1762.

Circuli in plano circumponi poſſunt dato circulo illi et inter ſe aequales ſex, vt omnes eum et ſe mutuo tangant. Id, cum in elementis geometriae doceatur, pronum erat, ſimile quidpiam de ſphaeris quaerere. Sed quaeſtio haec, haud paulo difficilior eſt, cum apertius intelligatur, quomodo locus planus circulis ſit replendus, quam quomodo globi in ſpatio ſolido disponantur, ſoluta vero, nec adeo commode ſenſibus ſubiicitur, vt illa de circulis nec vſum quempiam videtur adferre. Mihi tamen vel ſola ſua elegantia mereri videtur, vt tempus aliquod geometra ipſi tribuat, inprimis vero ad examinandam incitauit me, quod a magno Keplero ſubindicatam, et tantum non propoſitam viderim. Quod qua occaſione fecerit, ſi breuiter explicem, ſimul non omnino nihil facere illam ad rerum coeleſtium cognitionem, intelligetur. Liceat vero mihi, antequam ipſum Kepleri locum adducam, rem illa, qua facillime credo percipi poſſe, ratione enarrare, et commentarium vel vt textui praemittere.

Syſtema planetarium, cui ſol noſter praeeſt, globi ad modum cuius medium ſol occupet, poteſt concipi, hoc eſt, cogitari poteſt ſphaera ſoli fere concentrica, ambitu ſuo planetarum et cometarum omnium orbitas continens. Iam, ſi fixae ſoles ſint, et planetas regant, poteſt circa quamuis fixam ſimilis illi, quam dixi, ſphaera cogitari: Igitur quae proxime circum ſyſtema noſtrum ſolare iacent, fixarum ſyſtemata globi velut erunt, noſtri globum tangentes, illos, qui tangunt, aequales ponemus, vt ſolemus aequalia ſumere, quae cur inaequalia ſint, nulla ratio nobis occurrit, omnes

autem

autem ſe mutuo tangere, exiſtimabimus, quoniam, quibus interſtitiis alter ab altero ſtarent, et cui fini hoc vacua inter ſe relinquerent, nulla diuinatione poſſumus adſequi, tangentium vero ſe mutuo ordinem optime animo complectimur. Intelligetis, auditores, quam ſub initium, vt mere geometricam quaeſtionem propoſui, eo pertinere: quot poſſint fixarum ſyſtemata proxime circa noſtrum collocari. Sumi autem hic, quae demonſtrari nulla ratione poſſunt, neminem offendat, qui nouit de mundi, qui ſupra Saturnum eſt, ordine nil nobis conſtare, niſi quod ſuſpicamur. Suſpicari autem licet, nam fere omnia, quae certiſſima iam habemus in Aſtronomia ſub initium non niſi coniecturae fuerunt: igitur ſi diuinando corporum circumſolarium ordinem paullatim adſequuti ſumus, licebit idem de eo, quem adhuc ignoramus, poſteris ſaltim exſpectare.

Oſtendi vero in diſſertatione, quam Societati Regiae hic exhibeo, circa datum globum, poni poſſe, illum et ſe mutuo tangentes, ad ſummum numero duodecim medio, quem omnes tangunt, paullo maiores, inter ſe aequales. Hoc eſt: circa ſyſtema noſtrum ſolare duodecim ad ſummum ſyſtemata poni poſſe. Hos, tangentes globos omnes, ſimul cum medio, complectetur maior quaedam ſphaera, circa quam aliae duodecim ponentur, illa paullo maiores in ea ratione, in qua tangentes a quibus exorſus ſum inueſtigationem, media ſua erant maiores. Et ſic ſine fine pergi poteſt, ſiquidem noſtrum ſyſtema ſolare in medio reliquorum omnium ſtatuamus.

Iam ad Keplerum venio: Is ſub initium Epitomes, quam vocat, Aſtronomiae Copernicanae (L. I. P. II.), poſtquam mundum finitum eſſe, contra Iordanum Brunum inprimis tuitus eſt, oſtendere conatur, habere regionem, per quam ſunt diſperſae fixae, (ipſa eius verba adfero) "vacuum aliquem ſinum, cauumque ingens, a fixa-"rum agmine confertim circumfuſo, ceu a muro, vel fornice quodam concluſum et "circumſcriptum, et in huius caui ingentis complexu, tellurem noſtram cum ſole et "ſtellis mobilibus comprehendi". Argumentum eius rei hoc adfert: "Si regio fixa-"rum vndique ſimiliter eſſet conſita ſtellis, etiam in vicinia mundi noſtri mobilis, "ſic vt ſitus mundi ſolisque noſtri nullam haberet peculiarem circumſcriptionem prae "ſitu fixae alicuius, tunc apparerent nobis paucae aliquot fixae ingentes, nec vltra "duodecim, (quot angulos habet Icoſaedron) poſſent eſſe omnes eiusdem a nobis di-"ſtantiae et magnitudinis ſuccedentes his haud multo plures, haberent iam diſtantiam "duplicatam proximarum, aliae ſuperiores triplicatam, et ſic conſequenter ſemper "multipliciorem."

Ea vero ratione, ſi diſponerentur ſtellae, colligit Keplerus non niſi pauciſſimas a nobis viſum iri. Cum enim, quas maxime fulgentes conſpicimus, eae adeo exiguae nobis appareant, vt magnitudo illarum noſtris inſtrumentis vix poſſit menſurari, remotiores omnino effugere debere viſus noſtri aciem iudicat. Contra fixas eiusdem magnitudinis apparentis valde confertim poſitas videmus. Vnde colligit aequalibus

prope-

propemodum internallis ſupra nos ſublatas fixas eſſe, quarum quoad magnitudinem et multitudinem eadem propemodum vndique appareret facies.

Si locus hic eſſet, vberius de iis dicendi, quae Aſtronomus proferre poſſet, regererem Keplero, primae magnitudinis indubias fixas 13. recenſeri (*Ricciolus* Alm. nou. L. VI. c. 6. et 7.) facile ad ſphaerarum, quas tangere docui duodenarium numerum reducendas, cum magnitudinis illi limites non valde certi ſint. Reliqua vero aſtra de quibus Manilius dixit: minora apparere,

Non quod clara minus, ſed quod magis alta refulgent

intenſitate radiorum, quibus oculum in tenebris poſitum feriunt, non magnitudine imaginis, quam formant, ſentiuntur. Plurium autem ex diuerſis interuallis lucentium magnitudo non multum diuerſa nobis apparere debet, vbi nulla, quae menſurari poſſet, apparet. Sed redeo ad explicandam, cuius vſum qualemcunque his oſtendere volui, geometricam quaeſtionem.

Illam ſequenti modo aggreſſus ſum. Tria puncta, in quibus tres ſphaerae aequales, et ſe mutuo tangentes mediam contingunt, in ſuperficie mediae deſignant triangulum ſphaericum aequilaterum. Id triangulum, vt pars aliquota ſuperficiei integrae ſphaericae mediae ſit oportet, ſiquidem mediam ſphaeram vndique circumiaceant ſphaerae tangentes, triangulisque, quae dixi, ſphaericis, rete velut formant mediam ſphaeram totam obducens. Ita res redit ad areas triangulorum ſphaericorum computandas, quod fecerunt diu Iacobus Bernoulli (Act. Erud. Lipſ. 1691. Op. T. I. n. 42. et ante paucos annos Eulerus) Comment. Ac. Sc. Pruſſ. 1753. p. 233. (*) Mihi vero his ipſis computis breuiter, et mea ratione docendis hic paginam vnicam tribuere, quam lectores ſcripti mei ad caput eius veluti quaerendum ad Acta Eruditorum Lipſienſium, et Commentarios Academiae Regiae Pruſſicae ablegare. Summa vero eorum, quae reperi, huc redit: Rete eiusmodi triangulorum ſphaericorum aequilaterorum aequalium ſphaeram totam obducens fit ex triangulis, quorum quodlibet eſt pars, vel quarta, vel octaua, vel viceſima ſuperficiei ſphaericae. Etſi enim quaeſtioni: triangulum ſphaericum reperire, quod ſphaericae ſuperficiei pars aliquota ſit, innumeris modis reſponderi queat, tamen nulla harum reſponſionum, praeter tres, quas dixi, triangula praebet, quae coniuncta integram ſphaeram obducere poſſint. Et horum triangulorum diuerſa puncta angularia, et quae ſphaerarum ſingula puncta

(*) Silentio hic praeterire non poſſum, egregiam diſſertationem, *de menſura angulorum ſolidorum* Martini Ioann. Wallenii V. Cl. Prof. Math. Oboenſis in Commentariis Acad. Reg. Sc. Suecicae ad ann. 1763. Verſionis meae germanicae Vol. 25; p. 68. Anguli ſolidi tribus planis contenti menſuram, conſtituit, triangulum ſphaericum, quod continetur inter haec plana in ſuperficie ſphaerae, cuius centrum eſt vertex anguli. Ita portio ſphaericae ſuperficiei, metitur alios angulos ſolidos, pluribus planis contentos.

puncta contactus signent, sunt, quatuor, sex aut duodecim, prout triangula rete constituentia, sunt numero quatuor., octo, aut viginti. Vnde colligitur mediae sphaerae tangentes inter se aequales circumponi posse, non nisi quatuor aut sex, aut ad summum duodecim. Praeterea abit etiam rete illud casu quodam in circulum maximum sphaeram bissecantem, cui respondent tres sphaerae mediam in eius velut aequatore contingentes.

Haec consideranti facile est, suspicari quatuor illa octo, aut viginti triangula esse, quae in sphaera efficiuntur a planis lateralibus solidorum regularium, triangulis planis terminatorum tetrahedri, octahedri, icosahedri: statim quod coniectura erat certum, demonstratione efficietur. Interim illa inuestigatio, quae a triangulis sphaericis orditur, maxime naturalis et elegans mihi visa est, vniuersalior etiam, vnde deserere illam nolui. Keplerus, cur icosahedrum nominauerit, hanc rationem reddit: „quia quantum in illo „abest angulus ab angulo, tantum, aut non multo minus, absunt anguli omnes „a centro, apta itaque est haec figura ad hanc dispersionem fixarum vndique prope„modum aequalem exprimendam, sic vt centrum aeque atque anguli, repraesentent „vnum locum inter fixas.“ Ex his patet, quod viderit Keplerus icosahedri vim quandam esse ad confirmanda ea, quae de fixarum per spatia coelestia dispersione dixerat, et quod magnis ingeniis, inter quae eminet Kepleri, saepius accidit, partem veri suspicatus sit, sed alio paululum modo incosahedrum adhibeat, quam ego, dum in angulis eius centra sphaerarum collocat, non puncta contactus, contentus, proxime saltim aequales esse angulorum mutuas et a centro distantias. Quod autem geometricum est in quaestione solumque sciri potest, id omne reliquit inuestigandum.

Potuisset his sphaerarum collocationibus in rem suam vti Thomas Wright in noua, quam commentus est, vniuersi theoria (*), locumque adsignare, ex quo prouidentiae diuinae velut oculus, ordine circum se posita omnia, contempletur.

Huius viri luxurians, et poeticum magis quam geometricum ingenium, non ea fingit, quae Hugenius animi caussa ad fratrem scribat, aut de quibus Fontenellius post coenam cum femina disputet, sed digna Miltono aliquo, aut Klopstockio, splendide mentitur. Licebit tamen philosopho, his qualibuscunque de mundis innumerabilibus somniis animum oblectare, aeque ac regibus licet, puncti alicuius inter hos mundos minimam particulam ferro et flamma diuidere, huiusque tam magnificae possessionis caussa mentium ad aeternam felicitatem factarum myriades perniciei, vtinam non sempiternae! deuouere.

Lem-

(*) An Original Theory, or: New Hypothesis of the Universe . . . . by Thomas Wright, of Durhan. Lond. 1750. 4to.

Lemmata

de areis triangulorum ſphaericorum.

I. *Trianguli ſphaerici* ABC (Fig. 1.) *ad* C *rectanguli aream reperire.*

Sol. Sit D polus arcus AC; Pp elementum fluentis, et in AC tandem abeuntis arcus AP; Mm ſit fluxio arcus AM; MR ipſi parallelus. Radius ſphaerae = 1; ratio diametri ad peripheriam = 1 : π, et adeo dimidia ſphaerae ſuperficies = 2 π, erit area PDp = 2 π. $\frac{Pp}{2\pi}$ = Pp. Sit u altitudo ſegmenti ſphaerici contenti inter D et planum circuli cuius peripheriam M punctum deſcribit dum DP reuolutus dimidium ſphaerae deſcribit, ſeu ſit u = 1 — ſin PM eſt ex Archimedea ſphaerae dimenſione, ſegmenti, quod dixi, ſuperficies = 2 π u, hincque area MDR = $\frac{Pp}{2\pi}$. 2 π u = u. Pp; ſicque trianguli ſphaerici elementum PMmp = (1 — u). Pp. Supereſt ergo, vt u et Pp eadem quantitate variabili exprimantur.

Angulus MAP ſit = α; eſt ex quouis compendio Trigonometriae ſphaericae (vid. Hauſen El: Math. Trig. ſphaer. Rectang. cas. 9.) poſito ſinu toto = 1; 1: cot α = tang PM: ſin AP ſeu ſin AP = tang PM. cot α

Pp = $\frac{\text{d ſin AP}}{\cos \text{AP}}$; Ergo elementum trianguli

= ſin PM. $\frac{\text{d ſin AP}}{\cos \text{AP}}$. Hic ergo variabilem qua mediante PM et AP exprimuntur ita adſumere decet, vt formula differentialis quam ſimpliciſſima euadat. Tentando vero reperitur, id ſic obtineri: Sit cos AP = z; ſin AP = $\sqrt{(1 - z^2)}$, d ſin AP = $\frac{-\,z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$,

$\frac{\text{d ſin AP}}{\cos \text{AP}} = \frac{-\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$ et ſec PM = $\sqrt{(1 + (1 - z^2) \text{ tang } \alpha^2)}$; Igitur

ſin PM = $\frac{\sqrt{(1 - z^2)} \text{ tang } \alpha}{\sqrt{(1 + \text{tang } \alpha^2 - z^2 . \text{ tang } \alpha^2)}}$

tandemque elementum trianguli

= $\frac{-\,dz . \text{ tang } \alpha}{\sqrt{(\text{ſec } \alpha^2 - z^2 . \text{ tang } \alpha^2)}}$

= — dz

$$= \frac{-\,dz.\ \text{tang}\,\alpha}{\text{sec}\,\alpha.\ \sqrt{\left(1-\frac{z^2.\ \text{tang}\,\alpha^2}{\text{sec}\,\alpha^2}\right)}} = -\frac{dz.\ \text{sin}\,\alpha}{\sqrt{(1-z^2.\ \text{sin}\,\alpha^2)}}$$

Arcus autem, cuius sinus est z. sin α elementum habet $\dfrac{dz.\ \text{sin}\,\alpha}{\sqrt{(1-z^2.\ \text{sin}\,\alpha^2)}}$

Ergo trianguli elementum est $-\,dA$ sin $(z.\ \text{sin}\,\alpha)$
et triangulum = Const. $-$ A sin $(z.\ \text{sin}\,\alpha)$ euanescens vbi AP = o seu z = 1; vnde Const = A sin $(\text{sin}\,\alpha)$ seu Const = α et
Δ APM = α — A sin $(z.\ \text{sin}\,\alpha)$, et si AP = AC = η
vt z = cos η; Δ ABC = α — A $(\cos\eta.\ \text{sin}\,\alpha)$

Cor. 1. Si $\eta = 90°$ triangulum = α

Cor. 2. Si $\alpha = 90° = \frac{1}{2}\pi$; triangulum = η

Cor. 3. Ex trigonomia sphaerica (Hausen Rect. cas. 7.) est cos AMP = sin α. cos η. Ergo si AMP = β erit $90° - \beta$ = A sin $(\text{sin}\,\alpha.\ \cos\eta)$ et area trianguli = $\alpha - 90° + \beta = \alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi$ aequalis excessui summae angulorum obliquorum supra rectum.

II. *Aream cuiusuis trianguli sphaerici MNO fig. 2; 3. per angulos suos exprimere.*

Sol. Prouti perpendiculum NP, cadit intra triangulum fig. 2. vel extra fig. 3. area quaesita est summa vel differentia arearum MNP et ONP. Iam ex Cor. 3. praec.

Cas. 1. Δ MNP = OMN + MNP $-\frac{1}{2}\pi$
Δ PNO = PNO + NOM $-\frac{1}{2}\pi$

Summa Δ MNO = OMN + MNO + NOM $-\pi$.

Cas. 2. Δ MNP = OMN + MNP $-\frac{1}{2}\pi$
Δ PNO = π − MON + ONP $-\frac{1}{2}\pi$

Differentia Δ MNO = OMN + MNO + MON $-\pi$

Vt area trianguli cuiusuis sit excessus summae trium eius angulorum supra duo rectos, quae formula etiam rectangulum tenet (Lem. I. cor. 3.)

Schol. Lemma I. cum cor. 1. 2. est Iac. Bernoulli, mutata parumper analysi huc translatum; cor. 3. et Lemma II. Euleri. Quae sequuntur in vsus praesentes inde deduxi.

III. *Aream trianguli aequilateri computare.* Caſus hic eſt particularis Lem. II. Primo autem computandus eſt angulus ex Trigonom. ſphaeric. (Hauſen obliqu. caſ. 11.)

Dicatur latus $= \eta$ angulus $= \varkappa$; eſt ſin $\frac{1}{2}\varkappa = \frac{1}{2.\cos\frac{1}{2}\eta}$ item $= \frac{\text{ſec. }\frac{1}{2}\eta}{2}$

Area vero $= 3\varkappa - \pi$

Cor. 1. Haec area, ſi ſit pars aliquota ſuperficiei ſphaericae, erit, notante n numerum integrum $\frac{4\pi}{3\varkappa - \pi} = \eta$ vnde $\varkappa = \frac{1}{3}\pi\left(1 + \frac{4}{n}\right)$

Poſito $n = 1$ ſit $1 + \frac{4}{n} = 5$ et $\varkappa = \frac{5}{3}\pi$ quod fieri nequit, cum angulus quiuis ſphaericus duobus rectis ſit minor. Scilicet non poteſt triangulum ſphaericum aequari ſphaerae.

Si $n = 2$; $\varkappa = \pi$, et $\cos\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2.\text{ſin }\frac{1}{2}\varkappa} = \frac{1}{2}$; ſeu $\eta = 120°$. Abit igitur triangulum ſphaericum in tres arcus graduum 120, angulis 180° ſibi iunctos, adeoque conſtituentes circulum maximum, ſphaeram biſſecantem. Dimidium igitur ſphaerae hoc circulo refectum habetur pro area trianguli ſphaerici, ſuperficiei ſphericae dimidia.

Pro valoribus maioribus ipſius n, eſt $1 + \frac{4}{n}$ minor quam 3 adeoque $\varkappa$ minor quam π, eoque minor, quo maior eſt n; et $= \frac{1}{3}\pi$ pro $n = \infty$, vnde ſemper maior $\frac{1}{3}\pi$. Sic reſpondet ipſi

n	=	3	4	5	6	8	12	20	100	1000
$\frac{\varkappa}{\pi}$	=	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{251}{750}$

Cor. 2. Latus ex dato angulo computatur ope formulae $\cos\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2\text{ ſin }\frac{1}{2}\varkappa}$.

Si logarithmi tabulares adhibeantur dimenſiones radio ſupplendae ſunt. Tunc vero conſtans adhiberi poteſt 2 log rad — log 2.

Ex. Sit $n = 4$; eſt 2 log rad $= 20$

log 2 $= 0,3010300$

log conſtans $= 19,6989700$

log tab. ſin $\frac{1}{2}\varkappa = 9,9375306$

log cos $\frac{1}{2}\eta = 9,7614394$

Vnde $\frac{1}{2}\eta = 54°\,44' +$ ſeu $\eta = 109°\,28' +$

Ita

Ita respondent ipsi

n	= 4	8	20
η	= 109° 28′	90°	63° 26′
$\varkappa$	= 120°	90°	72°
$2 \sin \frac{1}{2} \varkappa =$	2. sin 60°	2 sin 45°	2 sin 36°
	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{2}$
	t	q	p.

significantibus t, q, p, d, latera trianguli quadrati, pentagoni, decengoni in circulo cuius radius = 1.

IIII. *Sit* A B C figura 4. *triangulum aequilaterum, vnum eorum, quae sphaerae superficiem metiuntur* (II. cor 1.), *super quouis eius latere describatur aliud aequale ABF; BCE, ACD, et super lateribus horum triangulorum describantur alia illis aequalia, vt AFG; ita pergendo construatur rete triangulorum sphaericorum aequilaterorum aequalium, sphaerae superficiem totam obducens, vt triangula sphaerica vbique cohaereant, et nullibi pars superficiei sphaericae, nisi triangulorum aliquo intercepta, transpareat. Quaeruntur conditiones triangulorum, quae rete tale constituere possunt.*

Sol. Circa quoduis punctum angulare, vt A, C, D, cet. debent collocari triangula eodem numero; cum ob rete vniformiter supra totam sphaeram expansum nihil sit, quo vnum eiusmodi punctum ab altero differat. Debent vero circa quoduis eiusmodi punctum collocata triangula punctum illud circumcirca includere, nullumque inter se vacuum relinquere; adeoque summo angulorum puncto cuiuis circumiacentium, quatuor rectos efficit, seu, si dicatur m, numerus integer, triangulorum singula puncta circumiacentium, erit $m \varkappa = 2\pi$; et contra, si haec anguli $\varkappa$ ad quatuor rectos ratio sit, dabitur rete, cum ad illud duo saltim requirantur, vt triangulum sphaericum, ex quo repetito, contexitur, metiatur sphaerae superficiem, et vt quoduis punctum angulare, circumcirca triangulis sphaericis includi queat. Iam ex III. cor. 1. conditio dicta anguli, redit ad $2\pi = m. \left(\frac{4+n}{3n}\right)\pi$ seu

$n = \frac{4m}{6 - m}$. Cum vero sit n positiuus finitus, vnitate minor, loco m non possunt substitui, nisi 2; 3; 4; 5; et sibi mutuo respondent

m	=	2	3	4	5
n	=	2	4	8	20
k	=	180°	120°	90°	72°

Igitur

Igitur non dantur nisi quatuor genera retium. Primum, si hoc nomine appellari potest, est circulus maximus (III. cor. 1.) reliqua sunt exempla (III. cor. 2.).

V. *Quod puncta angularia* diuersa *rete quoduis* (IIII) *habeat* cum quoduis punctum angulare semper pluribus triangulis commune sit?

Sol. Quodlibet triangulum, ex rete componentibus n, solum consideratum habet tria puncta angularia; Si ergo quoduis punctum angulare circumiacent anguli m; erit illud commune triangulis m, adeoque multitudo punctorum angularium diuersorum erit $= \frac{3n}{m}$.

Ita respondent ipsi

m =	2	3	4	5
puncta angularia diuersa	3	4	6	12

VI. *Retia triangulorum* 4; 8; 20; *sunt ea, quae in superficie sphaerae signantur ab angulis tetrahedri, octahedri, icosahedri.*

Dem. Per tria puncta angularia cuiusuis trianguli sphaerici transiens planum, terminatum chordis laterum trianguli sphaerici; erit triangulum planum aequilaterum. Haec igitur plana, si omnia cogitentur, habebuntur triangula plana aequilatera, aequalia, numero 4; 8; 20; pro diuersitate valorum ipsius m, continentia solida sphaerae inscripta. Horum triangulorum planorum 3, 4, 5; semper in vno puncto concurrent, angulosque solidos constituent 4, 6, 12, (V). Cum vero ad quoduis punctorum quatuor (V), qui valori m = 3 respondent, eadem omnia fiant, quae ad quoduis aliud eorum punctorum contingunt, ob vniformitatem retis, quo sphaera obducitur, quatuor solidorum angulorum quilibet aequalis et similis est alteri, corpusque adeo est tetrahedrum. Similiter res de octahedro, et icosahedro patet.

Problema I.

Reuoluto semicirculo AHI fig. 5. circa axem AI, generetur sphaera centri K, radu KA = 1; quaeritur: quot sphaerae circa hanc ita poni possint, vt illam totam ambiant, mediamque omnes, circumpositarum vero vicinae, et se mutuo, tangant.

Sol. Sit A vnum ex punctis contactus, vnius ex circumpositis et mediae, et planum ABK, circuli alicuius mediae sphaerae, maximi secet vnam ex circumpositis, sphaeram eam, quae in A tangit in plano per AML, vt L sit centrum tangentis, AMN semicirculus, quo circa AN reuoluto describitur; Ducatur KM recta, tangens sphaerae tangentis circulum generatorem in M, et in mediae generatore signans O punctum. Reuoluta figura NMOBI, circa NI axem describet AO arcus mediae

diae ſphaerae partem eam, quae ita pertinet ad tangentem in A ſphaeram, vt, ſi alibi, puta in B, tangat alia ſphaera, et ad eam pertinens arcus BO, deſcriptaque ab illo pars ſphaerae mediae, eodem modo determinentur, hi duo arcus, deſcriptaeque ab illis ſphaerae mediae partes, nihil commune habere poſſint, niſi forte terminos, ſiquidem altera arcu BO, vt prior arcu AO definiatur. Si vero ſint hi arcus AO, BO, in O contermini, erit KOM communis tangens ſphaerarum duarum ex circumpoſitis, quarum vna deſcribitur ſemicirculo AMN reuoluto circa AN, altera ſemicirculo BMQ reuoluto circa BQ. Hae duae igitur ſphaerae tangant ſe in M. Et contra, ſi circumpoſitarum ſphaerarum duae ſe tangant in M, patet ad illas in media pertinere arcus AO, BO, ſibi in O conterminos et aequales, ſi circumpoſitae ſphaerae aequales ſint.

Igitur inter duo puncta contactus proxima A, B, interiicitur arcus AB, magnitudinis, per ſphaerarum tangentium magnitudinem datae. Tria igitur ſibi proxima puncta contactus ſphaerarum aequalium, ſita ſunt in angulis trianguli ſphaerici aequilateri.

Iam tangentes ſphaerae, vndique mediam ambiunt. Puncta contactus ergo ita per mediae ſuperficiem diſſeminata ſunt, vt triangula ſphaerica inter illa contenta mediae ſphaerae ſuperficiem vndiquaque obtegant, et rete, quale *Lemma* IIII deſcribit, conſtituant. Ita res omnis ad lemmata reducta eſt, patetque, tot ſphaeris circumpoſitis locum eſſe, quot puncta contactus rete efficere poſſunt, hoc eſt vel 3, vel 4, vel 6, vel 12 (Lemm. V.)

Problema II.

Cuiuslibet ex circumpoſitis ſphaeris magnitudinem definire.

Sol. Sit Fig. 5. radius circumpoſitae LM = x; arcus AO = $\frac{1}{2}\eta$ (Probl. I. et Lemm. III.) Propter LMK = R eſt $\frac{x}{1+x}$ = ſin $\frac{1}{2}\eta$ vnde $x = \frac{\text{Sin } \frac{1}{2}\eta}{1 - \text{ſin } \frac{1}{2}\eta}$

Cor. 1. Quoniam ex trigonometricis conſtat, eſſe 2. ſin $\frac{1}{2}\beta^2$ = ſin verſ β; formula Prop. ita reducitur; $1 - \text{ſin } \frac{1}{2}\eta = \text{ſin verſ } (90° - \frac{1}{2}\eta) = 2 \text{ ſin } (45 - \frac{1}{4}\eta)^2$ vnde $x = \frac{\text{ſin } \frac{1}{2}\eta}{2. \text{ ſin } (45° - \frac{1}{4}\eta)^2} = \frac{\text{coſ } 2. (45° - \frac{1}{4}\eta)}{2. \text{ ſin } (45° - \frac{1}{4}\eta)^2}$

ſit $45° - \frac{1}{4}\eta = \lambda$, eſt $x = \frac{\text{coſ } 2\lambda}{2. \text{ ſin } \lambda^2}$

$= \frac{1 - 2 \text{ ſin } \lambda^2}{2 \text{ ſin } \lambda^2} = \frac{1}{2. \text{ ſin } \lambda^2} - 1$

Ex. Sit n = 2; $\frac{1}{4}\eta = 30°$ (Lem. III. cor. 1.) $\lambda = 15°$ eſt vt in ex. cor. 2 Lemm. III.

log.

log. conſt 19, 6989700
2. log ſin λ = 18, 8259924
0, 8729776.

reſpondens numero 7, 4641 +
vnde x = 6, 4641 +

Ob $\frac{1}{2}\eta = 60°$ eſt ſin $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vnde

$x = \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}.(2+\sqrt{3})}{4-3}$ quod praebet eundem valorem, qui modo repertus eſt.

Pro n = 4; ſin $\frac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{(t^2-1)}}{4}$

vnde $x = \sqrt{\frac{(t^2-1)}{t-\sqrt{(t^2-1)}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$

$= \sqrt{6} + 2 = 4, 4494 +$

Pro n = 8; ſin $\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$x = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}.(2+\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2} + 1 = 2, 4142 +$

Pro n = 20; cos $\frac{1}{2}\eta = \frac{1}{p}$ Vnde ſin $\frac{1}{2}\eta$

$= \frac{\sqrt{(p^2-1)}}{p} = \frac{d}{p}$ et $x = \frac{d}{p-d}$

$= d.(p+d)$ ob $p^2 - d^2 = 1$

Vnde, ob $d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ habetur tandem

$x = \sqrt{(5-2\sqrt{5})} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ Sed cum computata iam ſint latera polygonorum facilius ex formula d.(p + d) habetur x = 1, 10849 . . .

Cor. 2. Sphaerarum Probl. I. ſatisfacientium ſingulae media ſunt maiores.

Cor. 3. Radius ſphaerae, mediae concentricae, circumpoſitas vero tangentis, eſt 1 + 2x; vnde ſumta hac ſphaera, pro *media ſecunda*, ſimili modo computantur poſitiones et magnitudines, ſphaerarum *ſecundarum circumpoſitarum*, ſeu, hanc ita ambientium, vt illae Probl. I. ſuam mediam ambiunt.

Ex.

Ex. Pro ſphaeris 12; ſint P; D; latera pentagoni et decagoni inſcripti circulo radii $1 + 2x = \frac{1+2d}{p-d} = \frac{p+d}{p-d} = (p+d)^2$; erit

$P = p.(p+d)^2$; $D = d.(p+d)^2$ et radius cuiusuis ſphaerae ex ſecundis 12 circumpoſitis $= (1+2x).\frac{D}{P-D} = d.(p+d)^3$; et ita pergi poſſet ad tertium ſphaerarum ordinem, et ſine fine, ſed his immorari eſſet otio abuti.

Schol. Vt haec quodammodo illuſtretur, conſideremus adhuc paucis, quid eueniat, ſi circumpoſitarum ſphaerarum quaeuis mediae aequalis ſtatuatur, quo caſu, cum recte fieri non poſſit, non quaeuis vicinae ſphaerarum circumpoſitarum ſe mutuo tangent. Sit ergo in Fig. 5. L M = A K erit ſin A O = $\frac{1}{2}$ et arcus η, ſeu A B fig. 5; = 60°; Vnde ſi ſit A C B fig. 4 triangulum aequilaterum, cuius latus quoduis = 60° erunt vtique A, B, C, puncta contactus trium ſphaerarum mediae aequalium, et ſe mutuo tangentium. Pro hoc triangulo

eſt $\cos \frac{1}{2}\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vnde $\sin \frac{1}{2}\varkappa = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, et $\cos \frac{1}{2}\varkappa = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et $\sin \varkappa = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\cos \varkappa = \frac{1}{3}$.

Reperietur vero $\varkappa = 70° 31'$, vnde efficitur, quinque eiusmodi triangula poſſe iungi circa punctum A, quorum quinque anguli ad illud punctum conſtituent ſummam 352° 35', vt inter quintum et primum lacuna velut maneat, qualis eſt D A G fig. 4. Ea eſt 7° 25'. Rete igitur fieri non poteſt.

2. Quot autem hoc caſu ſphaerae circumponi poſſint, ſic inueſtigabitur: In fig. 6. repraeſentet circulus A B C a b c A circulum mediae ſphaerae maximum, ſitque idem in plano chartae. Puncta, quae ſignaui, ſingula a vicinis gradibus 60° diſtent, poterunt ergo eſſe puncta contactus. Ad hunc circulum, angulo ſin $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ inclinetur alius A D E a d e A, quem puncta in eo ſignata ſimiliter in ſextantes diuidant, erunt D, e, d, E, quatuor noua puncta contactus, accedentia ad priora ſex, vt ſic habeantur circumpoſitae ſphaerae 10. Cadet vero A D E a ſemicirculus ſupra chartam, a d e A infra, et angulus c A D erit acutus, cuius ſinus $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et coſinum habebit $= \frac{1}{3}$; D A B erit obtuſus, cuius ſinus $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et coſinum habebit $-\frac{1}{3}$. Puncta ſimilibus litteris maiuſculis et minuſculis notata, e diametro ſibi opponuntur.

3. Ita inter ADEa; ABCa; ſemicirculos, continetur fatis amplum ſuperficiei ſphaericae ſegmentum, ſupra planum chartae aeque vt reliquum ad dimidiam ſphaeram, quod ADEa, AcbA, ſemicirculi reſecant, concipiendum, de quo ſuſpicio oritur, capere illud vnum, aut plura puncta contactus. De quo, vt certi quidpiam ſtatui poſſit, quaeramus in hoc ſegmento F tale, vt gradibus 60. diſtet tam a D, quam a B; erit vtique F punctum contactus ipſis D, B, quantum fieri poteſt proximum. Id vero commode ſic efficietur:
Sit ABFD, fig. 7. pars iisdem litteris notata fig. 6. Triangula ſphaerica DAB, DFB habent eadem latera, et hinc angulos DAB = DFB; ſimiliter triangulorum ſphaericorum DAF; BAF, aequales ſunt anguli, quos nominaui. Vnde arcus AF biſſecat DAB angulum. Quaeratur ergo AF in DAF triangulo, ex datis

$$AD = DF = 60^\circ = A\sin\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } DAF = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,cAD \text{ (fig. 6.)} = A\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(1. huius). Sed cum aequalia ſint ASD, ASB, triangula, ob latera quae aequales DAS, BAS angulos intercipiunt aequalia, erunt recti ad S, et hinc perpendiculum DS trianguli aequicruri ADF, biſſecabit baſin AF, ſufficit ergo computare in triangulo ASD, ad S rectangulo, $AS = \frac{1}{2}AF$ ex datis DAS; AD; Eſt ergo (Hauſen Trig. ſph. rect. cas. 4.)

1: tang AD = coſ DAS: tang AS ſeu

$$\text{tang } AS = \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = 1 \text{ vt } AS = 45^\circ \text{ et } AF = 90^\circ.$$

Igitur F eſt in extremo quadrantis per A ita ducti, vt DAB angulum fig. 6. biſſecet. Et cum idem quadrans productus biſſecet EaC angulum, reperietur F idem, ſi quaeratur punctum a ſingulis E, C, punctorum in ſegmento, quod dixi, gradibus 60. diſtans. Habetur ergo in hoc ſegmento vnicum punctum contactus F; itaque in oppoſito ſegmento ſemicirculis adeA, abcA infra chartae planum contento, etiam vnicum punctum contactus, gradibus 60 diſtans a ſingulis punctorum d, b, c, e,

4. Praeter haec 12. puncta contactus (2, 3) dantur nulla. Nam propter triangula aequilatera, lateris 60°,

DcA, BeA, bEA, daC,

tangunt ſe mutuo ſphaerae; quae mediam tangunt in

A, c, D; A, e, B; b, E, a; d, a, C;

Similiter ſphaerae tangentes mediam in F, f; contingunt tangentes in D, B, C, E, et in d, b, c, e. Vnde patet, ſphaeras adeo confertim poſitas eſſe, vt aliae interiici illis non poſſint.

5. Non tamen quaelibet tanget ſibi vicinam. Id intelligetur de tangentibus in D, et B, computando DB arcum duplum ipſius DS (fig. 7.).

Eſt

Eſt vero 1: ſin AD = ſin DAS: ſin DS

Vnde ſin $DS = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ſeu $DS = 45°$ et

$DB = 90°$. Igitur tangentes in D et B ſe mutuo non tangunt. Cum tamen D et B non diſtent arcu 3. 60°; inter haec puncta in arcu DB, tertium non cadit. Eadem valent de E, C; et d, b, et e, c, punctis.

X.

De inertia corporum.

d. 5. Mart. 1763.

Quieſcens corpus, niſi a cauſſa externa ſollicitetur, perpetuo quieturum, in motu conſtitutum, nec deflexurum a via, nec tardius aut velocius, quam coeperat, progreſſurum, niſi rurſus cauſa externa accedat, iam ab omnibus, qui de motu agunt, ſumitur. Haec duo, quietem aut motum, quo corpus certam viam ſequitur, certaque velocitate progreditur, communi nomine *Statum* appellant, vt, quod dixi, eo redeat: ſtatum corporis, ſiue quieſcentis, ſiue moti, niſi a cauſſa externa, non mutari. Hanc legem, quod obſeruant corpora *inertiae* cuidam tribuitur. Eo vocabulo, parum intellecto, multi abſurde vſi ſunt, rem vero ipſam, ſummi etiam mathematici, partim obſcuriorem iudicarunt, partim explicare conati ſunt. Igitur quae mihi videntur lucem aliquam diſquiſitioni adfundere, ſi proferam, nec actum plane acturum me credo, nec omnino non operae pretium facturum.

Quod inſit illa inertia corporibus, duplici modo probari poſſe, plerumque dicitur, *ſenſu*, et *ratiocinio* ex ipſa corporis et materiae idea ducto. Et de primo quidem nullum dubium eſt; cum quilibet, ſi manu applicata, mouere quieſcens corpus, aut turbare motum conetur, ſentiat, id ſe, niſi vi quadam adhibita, exſequi non poſſe, idque ceteris paribus, magis ſentiat, ſi plus materiae ineſſe corpori conſpiciatur. Hinc idem fieri in corporibus, quae non tangimus, recte ſuſpicamur. Sic ideam eius, quod inertiam vocamus, naſci in nobis exiſtimo, ita quidem a tactus ſenſu oriundam, vt dubitem, habiturusne ſit illam, qui, ſi fingere hoc licet, nec alia corpora, nec ſuum vnquam tetigerit. Illum, crediderim, ſi incurrere in ſe mutuo corpora externa, vrgere ſe, reſilire vnum ab altero viderit, non id cogitaturum, quod nos idem videntes cogitamus, ſed forte eodem loco haec poſiturum, quo nobis, ſequentes, fugientesque ſe, vmbratiles laternae magicae picturae habentur.

Nobis vero, dum corporis phyſici idea, abſtrahendo, quod omnibus, quae ſentimus, corporibus commune eſt, formatur, non poteſt non inertia hinc qua nullum

corpus agnoſcimus, eandem ideam ingredi. Liceat igitur metaphyſicis materiam per *extenſum iners* definire, et de ea quantacunque velint ſubtilitate diſputare, dummodo meminerint, totam hanc diſputationem, idea, quam ſenſu accepimus, niti.

Primum, quod hinc colligo, eſt: inertiam phaenomenon eſſe, vt ſunt, quae ſenſibus percipiuntur, omnia, hoc eſt, illius in animo noſtro repraeſentationem, (liceat ſermone noſtrorum temporum vti, ne, dum latinus eſſe volo, obſcurus plurimis fiam), illius igitur repraeſentationem, ex coniunctis pluribus, quas ſingulas non diſtinguimus, naſci. Qui igitur quaerunt, vnde inſit inertia materiae, niſi id poſtulant, vt phaenomenon hoc in alia ſimpliciora reſoluatur, aut phaenomena, a quibus pendeat, nominentur; intimam materiae eſſentiam explicari, et quid ei inſit, quod inertiam nobis obiiciat, doceri poſtulant. Hoc vero, vix fieri a nobis poſſe, crediderim; Ego quidem, etſi totus accedam, Leibnitii, de elementis veri, cuius velut ſpectrum aliquod ſentimus vniuerſi, ſententiae, nemini tamen illam obtrudam, dummodo mihi concedat, quod, profecto non imbutus illo, ſi error eſt, errore Fontenellius docuit, eſſe nobis, quod ſentitur, vniuerſum, quod dramatis ſpectatoribus ſcenae ſunt, latentibus machinis verſatiles. Earum machinarum, quae has vniuerſi ſcenas regunt, aliquas philoſophi detegunt, non omnes, non certe maxime ſublimes, a quibus propiores oculis noſtris pendent, funes et trochleas. Quid materia ſit, et vnde inertiam mihi exhibeat, me docturum quaererem prius, quid ſimplex radius lucis ſit, et vnde alius eo, quem rubrum vocamus, alius violaceo colore, oculum meum feriat, mixti vero omnes, ex albo flaueſcant. Hanc aliquam ex inferioribus machinae mundanae particulis exiſtimo, cuius rationes, ſi ſatis explicare mihi non poſſit, non efficiet, vt de ſupremis illis ad quas viſus noſter non pertingit, velut Icaromenippo cuidam referenti credam.

Supereſt igitur, vt inertiae phaenomenon, vel in ſimpliciora, vt radius ſolaris, in coloratos reſoluatur, vel ex aliis prioribus, aut vniuerſalioribus, vt adſcenſus aquae in antliis ex pondere aeris, aut grauitas ex attractione, deducatur. Horum aliquod praeſtare, quam difficile ſit, facile intelliget, qui vix cogitari prius aliquod, magisque commune quam inertiam materiae meminerit. Ex eo tamen, quod impenetrabilis ſit quaeuis materiae portio, hoc eſt, ex loco, quem occupat, alia omnia excludat, inertiam deducere conatus eſt ſummus Eulerus (Comm. Acad. Pruſſ. 1750. p. 419. ſeq.); Illius argumento aliquid, quod deeſſe mihi videtur, ſi addam, non contendere cum mathematicorum omnium praeceptore, ſed confirmare eius ſententiam iudicabor.

Ita, ſi illum recte capio, rationes ſubducit (loc. cit. §. XVIII.) „Corpus aliquod „motum, in aliud quieſcens, incurrat; ſint autem ambo impenetrabilia, vt iam „vtrumque in ſtatu ſuo manere non poſſit; diſpiciendum igitur eſt, vnde oriatur vis „ſtatum mutans; ob inertiam enim ſtatus mutatio cauſſa opus habet, et cauſſa ſtatum „mutans, vis appellatur. Haec igitur vis vel neceſſario iuncta eſt impenetrabilitati, „vel ſeparari ab illa poteſt. Si vltimum ſumatur, poſſet ſine illa vi impenetrabilitas „ſubſi-

„ſubſiſtere, ſed abolita illa vi, hoc eſt, cauſſa ſtatum mutante, ceſſabit effectus, ma-
„nebitque vtrumque corpus in ſtatu ſuo. Quod cum fieri non poſſit, quoniam
„penetrarent ſe corpora, vim eam, ab impenetrabilitate ſeparari non poſſe, faten-
„dum eſt.“

Haec, quae latina ex gallicis Euleri feci, caput argumenti eius continent. Facile vero illi concedo, quod ſtatim addit, impenetrabile corpus aliquid habere, quo penetrationem impediat, id vero inertiam eſſe, nondum video. Inter verba eius, quae adduxi, haec imprimis dubium mihi mouerunt: „quod *ob inertiam* ſtatus mutatio „cauſſa opus habeat.“ Qui iners corpus eſſe, ex eo deducere vult, quod impenetrabile ſit, ei in illo loco nondum licet inertiam nominare, hoc eſt, illud ſumere, quod adhuc in quaeſtione eſt.

Lamina ex re duriſſima, ferro puto, cauum quodcunque, ſphaericum, cubicum, aliud circumueſtiens, intelligi ſine dubio poteſt. Ita habemus aliquid impenetrabile, de quo, an iners ſit, nondum conſtat, antequam conſtet, materiam omnem inertem eſſe. Nam, ſi de hoc non conſtet, poterit lamina illa facta eſſe ex re duriſſima, et tamen non inerte. Cubus, quem dixi, cauus non poterit ſimul in eodem loco eſſe cum globo aeque cauo; ſed forte locum ſuum ſine vlla vi globo aduenienti cedet.

Impenetrabile eſt, cuius ſuperficies ex partibus ſumma firmitate cohaerentibus conſtat; intrari in illud non poteſt, totum forte poterit ſine vlla vi propelli. Thoraces antiquos ferreos in armamentariis noſtris, nullo negotio Galli loco mouerunt, alia omnia experturi, ſi non vacuos, ſed in illis heroes, quorum ſunt exuuiae, repeririſſent. Tantum differunt, impenetrabile eſſe, et locum ſuum tueri.

An igitur impenetrabilis corporis ſtatus ſine cauſſa mutari poterit? Non id volo, qui a Cicerone didici, turpius nihil phyſico eſſe, quam dicere, quod aliquid ſine cauſſa ſit. Sed, quod illa cauſſa ex earum genere ſit, quae in mechanica vires appellantur, quod impenetrabilium corporum ſibi occurrentium, motus ad *dynamicam* pertineant, non ad ſolam *phoronomiam*, ex ſola impenetrabilitate deducere non poſſum. Mechanicas vires dixi; nam ſi quaelibet mutationum cauſſa vis dicatur, cogitans animus vim habet, quae huc plane non pertinet. Mechanicae autem et in corporibus reperiendae vis, notionem vnde conſequamur, niſi ex eo, quod ante dixi, nos ſentire, dum in corpora agimus, vel ab illis aliquid patimur, ego certe non intelligo. Igitur ſummo iure Eulerus contendit, inertia corpora non fore, niſi impenetrabilia ſint; penetrabili enim continget, quod aetheris daemonum Miltoniahorum inuolucris, quae libere beatorum geniorum gladios transmittebant; dabo etiam illi, cauſſam adeſſe debere, quae mutet ſtatum corporis impenetrabilis, ſed hanc cauſſam eſſe, quae *vis* mechanicorum ſermone dicatur, id ſolo ſenſu et analogia conſtare arbitror, hocque addendum eius inertiae explicationi exiſtimo.

Cetera, quae dicuntur de inertia, et obſcuriora etiam pluribus iudicantur, facile hinc poſſunt intelligi. Cum ſolo illo, quod libere per locum aliquem moueri non

poſſimus. eſſe ibi materiam agnoſcamus, haec quidem quieſcentis materiae inertia, pro charactere materiae a nobis ſumitur, et materiae quantitati proportionalis eſt, vbi enim non eſt, ibi materiam eſſe ignoramus. Deinde, cum nihil ſine cauſſa eſſe ſciamus, qualis cauſſa ſit motus in corpora nati vel turbati, facile intelligimus, pati ſcilicet illud corpus ab alio quidpiam ſimile, illi, quod a nobis pateretur, ſi motum eius excitaremus, aut turbaremus. Senſus autem nos docuit, dum ad id perficiendum vim quandam adhiberemus, in nobis aliquid mutari; huic, quae in nobis contingeret, mutationi ſimilem in corpore, quod noſtri vicem ſubit, ſumimus, eiusque rationem in corpore, cuius ſtatus mutatur, quaerimus. Dum enim intelligimus, quod corpus mutat ſtatum alterius, hoc eſt, in illud agit, eiusdem corporis ipſius ſtatum mutari, hoc eſt, illud ipſum corpus pati, mutuas eſſe actiones, et paſſiones corporum amborum, concludimus, et patiens omne *reagere*, dicimus.

De hoc vulgatum proſtat aſſertum, actionem et reactionem eſſe aequalem, quod quam multis crucem fixerit, quam abſurde a pluribus acceptum fuerit, dici vix poteſt; cum tamen nihil aliud adſerat, quam hoc: Si corpus vnum ſtatum alterius mutet, prioris ipſius ſtatum tantum mutari, quantum poſtulat mutatio ſtatus in altero producenda, quo facto, non amplius agunt in ſe corpora, hoc eſt, neutrius ſtatus amplius multatur. Ita in exemplo, quo Newtonus vſus eſt, ſi equus lapidem ingentem poſt ſe trahit, equus agit in lapidem ad inertiam lapidis vincendam, eamque virium ſuarum partem huic rei impendit, quae inertiae lapidis reſpondet. Qua re non poteſt non mutari, eaque mutatio reactioni lapidis tribuitur. Non poteſt illa reactio maior vel minor actione equi eſſe, cum non ſit, niſi id, quod in equo ipſo dum agit, mutatur, ſeu, cum non ſit niſi ipſa equi actio, in equo, vt ita dicam, conſiderata. Si itaque v. g. equus vi tota quam decem partium ſtatuam polleat; harum autem quinque lapidis inertiae reſpondeant, dimidio vis ſuae in lapidem aget, hoc eſt, in actionem dimidium vis ſuae impendet, ſeu, vt loquuntur, reactione lapidis vis ſuae dimidium perdet. Reliquo dimidio progredietur, iam poſt ſe trahens lapidem velut non amplius inertem, inertia per alterum dimidium ſublata; itaque reliquo illo dimidio non amplius aget in lapidem, actionem mechanica non nouit, niſi vbi eſt, quod actioni obſtet, illaque ſuperetur, quod vero non iners eſt, non obſtat actioni.

Progredietur ergo equus, ac ſi polleret ſaltim dimidio virium, et poſt ſe traheret nihil, aut, quod in mechanica pro nihilo habetur, aliquid non iners.

Hoc exemplum fuſius explicare volui, quoniam ſimul oſtendit, inertiam velut ſuſpendi poſſe ad aliquod tempus in corpore, et lapidem ſequi equum, ac ſi non eſſet iners, etſi maneat impenetrabilis. Quibus illa, quae ante dixi de concipienda impenetrabilitate ſine inertia, confirmari aliquo modo crediderim.

Paradoxum aliquibus viſum eſt, quod inertia effectum non edat ſine actione alterius corporis, effectum vero maiorem minoremque pro varia actione alterius corporis

poris edat. Qua re a reliquis viribus corporeis omnibus differre videtur, quae ipſae agunt, non exſpectant donec ad reactionem, velut prouocentur, agunt vero gradu determinato, vt magis aut minus agere non poſſint. Eam ob rem, ſitne inertia vis appellanda, dubitatum ab aliquibus eſt; alii vel ipſo inertiae nomine vti noluerunt. Eſt ſcilicet haec inertia vt

Vocalis Nymphe, quae nec reticere loquenti
Nec prior ipſa loqui didicit reſonabilis Echo.

OVID.

Quae Echo, vt vox non corpus eſt, aliquibus etiam *inertia* vox mera viſa eſt, non notio.

Iudicetis, auditores, num poſſint haec aliquo modo ſic in exemplo explicari: ſi lapidem protrudo, mutationem in illo genero; Haec mutatio ſine cauſſa naſci non poteſt, cauſſa actio mea in lapidem dicitur; hac actione aliquid vis meae impendo, adeoque ipſe mutor. Ita ſtatum lapidis mutare non poſſum, niſi ſimul mei ipſius ſtatus mutetur. Quod meus ſtatus mutetur, id tanquam paterer aliquid a lapide conſiderant, reactionemque lapidis appellant. Ego de verbis cum nemine diſputabo, dummodo eas notiones verbis ſubiicere liceat, quas complecti animo poſſum. Igitur hic profiteor, in hac lapidis reactione hoc vnum me videre: ſtatum lapidis non mutari ſine cauſſa, cauſſam eſſe vim meam, quae quomodo ipſa mutetur, dum lapidis ſtatum muto, ſenſus me docet. Inſitne quiddam lapidi, quod meum ſtatum mutet, id ignoro, video tamen omnia ita euenire, quaſi tale quid ineſſet, hoc eſt, phaenomenon video. Dicam igitur, lapidem in me reagere, eo ſenſu, quo dico, coelum motu diurno circa me reuolui. Vtrumque enim ſenſibus ita apparet. Et reactionem inertiae tribuam, inertiamque vim appellabo, quoniam vis eſt mutationum principium, inertiae vero mutationes, quas patior adſcribo.

Lapidis et *mei* vocibus, quibus in hoc exemplo vſus ſum, patet, corporum A, et B, ſigna ſubſtitui poſſe. Ego malo ignorantiam meam plano ſermone profiteri, quam vocibus ſubtile quid, et profundum ſonantibus celare. Igitur non pudet, quaecunque de inertia ſcio paucis verbis enunciare. Eſſe illam principium rationis ſufficientis, applicatum mutationibus corporum, adhibita vis idea illa, quam ſenſus proprius quemlibet docuit.

XI.

De translatis in dictione Geometrarum.

d. 13. Aug. 1763.

Ioa. Iacob Rouſſeau ille iam non amplius ciuis Geneuenſis, inter plurima, quae protulit, ingenioſa magis quam vera, (ſi poteſt ingenioſum eſſe quod verum non eſt)

vnum

vnum etiam habet, quod eo auctore dicit, nouus eius Abaelardus, multo certe, quam meruerat, felicior, quod crimen veteris Abaelardi, commisit, poenam effugit. Est vero haec eius sententia: Propria dictione et figuris omnibus carente, qui semper vti possit, eum aut stupidum esse oportere, aut geometram (*). Quod qui dixit, quam parum geometrarum dictionem nouerit, animus est in praesenti breuiter ostendere, non vt sanctum Preuxium refutem, quo sane oleum et operam me crederem perditurum, sed quoniam translatorum frequenti in sermone geometrarum vsu, insigniter res geometrica creuit, errores vero commissi sunt, a magnis etiam viris, qui leges haec translata adhibendi migrarunt, aut vocibus in sensu non proprio se vti omnino non cogitarunt. Haec explicare, inuentorumque fontes aperire, id vtique ad augendam scientiam pertinere arbitror.

Primum translatorum exemplum praebeant quanta positiua, et negatiua, quae dicuntur. Potestne vehementius a proprio significatu recedi, quam si vocabulo quodam, rem ei, ad quam pertinet vocabulum, e diametro oppositam, designes, bonam valetudinem dicas, et aduersam intelligas, pecuniam paratam nomines, et de debito loquaris? Et tamen hac translatione demonstrationes in breuitatem contrahuntur, multitudo casuum diuersissimorum vnica formula continetur, in iis vero quaestionibus, quibus etiam negatiua quanta respondent, inueniuntur, quae nisi ad haec attendissemus, perpetuo latuissent. Sed hic pudet fere fateri, quam in transuersum se agi passi fuerint a vocibus male intellectis aliqui geometrarum. Quorum vnum hic saltim nominabo, Wolfium, non, vt aliqui faciunt contumeliae caussa, sed quoniam ad historiam intellectus humani pertinere arbitror, virum, cui, ob emendatam philosophiam, tantum debet Germania, imo Europa, hic, contra quam alias facere praeceptis et exemplo docuit, res a verbis parum distinxisse. Negatiuas enim quantitates positiuis heterogeneas iudicauit, quoniam nihilo minores appellantur (**), et absurdum pronunciauit, ex impossibilibus factoribus possibile productum nasci (***), quorum vtrumque quam falsum sit, norunt iam, vel qui prima elementa analyseos recte perceperunt. Illa vero quantitatum nihilo minorum appellatio, ita quidem poetica est, vt eam adhibendam censuerit qui Dauidis Odas, ipsis Pindaricis sublimiores, vtpote vero Deo agitante effusas, magis poetice, quam plerique post illum poetae, vertit, Lutherus (†).

Hoc negatiuarum quantitatum translato porro in multis rebus ita vtuntur analystae, vt signa, quorum notiones secum pugnent, coniungere, et sensu vacua dicere videan-

(*) Pour peu qu'on ait de Maleur dans l'esprit on a besoin de métaphores et d'expressions figurées pour se faire entendre . . . et je soutiens, qu'il n'y a qu'un géomêtre et un sot, qui puissent parler sans figures. Nouvelle Heloise II. Partie; Lettre 16. p. 290. ed. d'Amsterd. 1762.

(**) Anal. Lat. §. 23. seq.

(***) Ibid. §. 71.

(†) Ps. LXII, 10.

videantur, ſicque proxime ad illos ſcriptores accedere, quorum meteora riſit Werenfelſius. Qualis eſt illa potentiarum, quae negatiuos exponentes habent, formula, cui, ſi exponens definitur numerus factorum aequalium, non plus ſenſus ineſt, quam aliquot noſtri aeui aethereo Seraphicorum hexametrorum myriadibus. Verum autem huius formulae ſenſum, aeque ac ſimilis, quae exponentes fractos continet, ex oppoſitione et partitione rationum, primus quantum ſcio, diſtincte explicavi (A).

Frequens geometris tropus eſt, aut, ſi non permittitis, vt hac voce vtar eloquentiae magiſtri, certe inſignis ab vſitato vocum ſignificatu deflexio, cum quantitas varians continuo ad ſtatum aliquem datum accedit, nunquam vero in illum peruenit, hunc ſtatum vltimum appellare, eorum omnium, quos pertranſit quantitas variabilis, et ſic eorum, quae fiunt, vltimum dicere, quod nunquam fit. Ita ſeriei fractionum ſine fine pergentis *ſumma* vocatur, id ad quod ſumma terminorum, qui exhiberi poſſunt, continuo accedit, nunquam illud attingit. Ita in ipſa geometria elementari chordarum circuli datae diametro parallelarum vltima dicitur tangens, et punctum contactus, velut ex duobus punctis interſectionis, in eo coeuntibus compoſitum fingitur, idemque ad alias curuas extenditur, hoc inſigni vſu, vt vulgari algebra tangentes inde determinare liceat, et ſimili modo ipſas curuaturas, tribus punctis, in quibus circulus curuam ſecat, in vnum coeuntibus; poteſtne vero quidpiam inſolentius dici, quam punctum, in quo duo, tria aut plura ſimul ſint?

Alio ſenſu, ſed aeque translato, multiplex punctum dicitur curuae, quod ad plura eius crura ſimul pertinet, eo certe effectu, vt recta, quae curuae in hoc vnico loco occurrit, bis vel ter ibi occurrere cenſeatur, prouti duplex vel triplex punctum eſt (*).

Sed inprimis ad hoc translatorum genus ſpectat *infiniti* vocabulum, et calculus, qui ab eo nomen habet. Sunt etiam, (et auxerunt illi hunc calculum nouis inuentis) qui translatum hic eſſe infiniti vocabulum adeo non ſentiunt, vt enunciatis his, quaſi proprio ſenſu vera eſſent, in naturalis doctrinae quaeſtionibus ipſaque metaphyſica ſint vſi (**). Aliter omnino is, a quo continens terra omnis hunc calculum accepit, Leibni-

(*) De his breuiter plerumque agitur in ſyſtematibus analyticis. Vberius et erudite illa tractauit Georg. Heinr. Bortz V. Cl. Matheſ. Prof. Lipſ. in diſputatione Lipſ. 1769. habita: De rationibus regularum quas calculus differentialis in conſtituendis punctis curuar. multiplicibus et ſubtangentibus in iis ad haec puncta ducendis offert.

(**) Paradoxa multa de infinito, habet Galilaeus in libro quo theoriam grauium cadentium primus docuit: *Diſcorſi e dimonſtrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze* cet. (Lugd. Bat. 1639.) dialogo 1. Ea inſoluta relinquit, ſine dubio, vt philoſophis ſui temporis, quam parum ſubtiles eſſent, oſtenderet, alias pleraque eadem facilitate explicaſſet, qua

Leibnitius, qui infinitum loquendi ſaltim formulam eſſe diſertis verbis pronunciauit. Scilicet, non poterat figura, in ſermone etiam geometrico, eum effugere, qui ſeueriоribus litteris amoeniores, et quae ad pulchri ſublimisque ſenſum faciunt, vt decebat *Lipſiae* natum et educatum, iunxerat. De ipſa vero infiniti notione, cum olim in conſeſſu Societatis Reg. loquutus ſim, ſupereſt vt ſingulares quosdam huius formulae vſus adducam. Inter quos primo loco occurrit tranſitus in oppoſitum per infinitum. Si quantitas aliqua magis magisque diminuatur, donec euaneſcat, et adhuc eaedem, quibus diminuta erat, mutationes continuentur, non adeo difficile eſt, oſtendere, vel parum notionibus his adſueto aliquid priori quantitati, quae diminuebantur oppoſitum proditurum. Nam vt vulgari, quo hoc illuſtrant, exemplo vtar, qui expenſas reditibus ſuis maiores facit, ſine dubio paratam ſuam pecuniam perpetuo diminuit, et niſi ab hoc vitae genere deſiſtat, debita contrahet, hoc eſt, in ſtatum perueniet ei, in quo ante erat, cum paratam pecuniam poſſideret, oppoſitum, ſeu, vt loquuntur mathematici, negatiue diues fiet. Hoc, ſi facile quiuis, etiam non ipſe expertus, intelligit, id tamen ſine dubio obſcuriſſimum videbitur, ſi dicam: qui perpetuo auget res ſuas, et ita ſine fine pergit, ipſasque Croeſi diuitias ſuperat, etiam illum hoc ipſo modo debita contrahere; hoc eſt, vt generaliter illud enunciare ſolemus, poſitiuam quantitatem, quae ſine fine augetur, poſtquam vltra omnes limites creuit, negatiuam fieri, vnde iam Walliſius, negatiuas quantitates, *plus quam infinitas* appellauit. Quis vero eſt, cui non abſurdum primo intuitu videatur, augmenti maximi eumdem effectum eſſe, ac diminutionis? vt pateat ſenſu ab eo, quo plerumque voces accipimus, plurimum

pag. 36. quaeſtioni: an recta data contineat partes numero infinitas, reſpondet: continere tot partes quot libuerit.

Myſteria, et quae fiunt ex myſteriis minus recte acceptis, abſurda, infiniti, collegit P. Roger. Boſcouich *de transformatione locorum geometricorum* §. 880. ſub finem tractatus ſui *de Sectionibus coni* tertiam partem elementor. matheſ. conſtituentis (Rom. 1754.). Ea vero omnia, tunc demum locum habent ſi infinitum conſideretur tanquam aliquid actu exiſtens, ſeu, ſi voce P. Boſcouich, ſumatur *infinitum abſolutum*. Ipſe vero recte monet, omnia nulla difficultate explicari, ex quantis in infinitum creſcentibus aut decreſcentibus.

Vt geometriam quae extenſionem in infinitum diuidit, conciliaret cum metaphyſica, quae corporum elementa ſimplicia ſtatuit, P. Boſcouich corpora compoſuit, ſi recte memini ex ſimplicibus inter ſe diſtantibus, velut ſi cubi cuiusdam, nihil exiſteret, praeter octo eius puncta angularia. Eadem conſideratio, nomen P. Boſcouich adhuc ignorantem me, in eamdem ſententiam deduxit, quam expoſui *in den Beluſtigungen des Verſtandes und des Witzes* 1743; *Aprilmonat* p. 314. Neque video qua alia imagine exhiberi poſſit compoſitio extenſi ex non extenſis. Sed iam, ne paternus quidem, in inuentum, etiam meum, adfectus, efficit vt magnopere illo delecter, rectius enim adſequi mihi videor Leibnitium et veritatem, ſi dicam: extenſum non *componi* ex ſimplicibus (et adeo illorum diſtantiis) tanquam *partibus*, ſed *oriri* vt *phaenomenon* oritur, ex iis quae id phaenomenon non ſunt. Sed nunc non eſt his locus.

mum remoto haec dici (B). Habet alia mirabilia hic tranſitus in oppoſitum per infinitum, eo enim curuarum, quae in infinitum progrediuntur, continuitas ſaepe nititur, et ita quidem, vt punctum ad dextram infinito interuallo remotum, pro eodem habeatur cum alio puncto ad ſiniſtram infinito interuallo remoto, fere, vt ſi qui a tellure noſtra vsque ad polum coeli arcticum euolaſſet eodem momento, quo illum attigit, ſimul in antarctico eſſe cenſeretur (C). Sed haec et ſimilia, cum vix intelligi poſſint, ſine diagrammatibus in illam diſſertationis meae partem reieci, quam non praelego, in qua etiam rectius quam ab aliis factum legi, oſtenditur, quo ſenſu haec translata accipienda ſint, et quam neceſſaria ſit illorum veritas. Hic talia ſaltim adferenda cenſui, quae percipi aliquo modo poſſint, vel ab iis, qui non toti ſunt in his ſtudiis. Horum ne quis damnet mathematicos, ita verbis, vt videtur, ludentes cogitet ſaltim: quae dictionis ſententioſae apud oratores et poetas, qui recte illa vti norunt, vis eſt, vt verum clariore luce illuſtretur, faciliusque agnoſci, et non tam detegi, quam ſentiri illud faciat, eamdem hic etiam vſui eſſe poſſe. Ex his autem vocibus ſenſu non proprio acceptis, enunciata conduntur nulli obſcuritati obnoxia, et hinc ratiocinia indiuulſo nexu cohaerentia componuntur, et, ſi vnum quoddam translatum adhibeatur, alia etiam adhibenda eſſe, demonſtratur, dummodo quae notio ſubſit voci translatae, ſatis definiatur, illeque translationis tenor perpetuus et velut allegoria quaedam ſeruetur. Fuerunt, qui in hoc peccarunt, vt Nieuwetyt, qui infinite parua primi ordinis conceſſit, vlteriora negauit, ſed prima haec infinite parua, aeque ac illa, quae etiam non magna videntur apud Ouidium

\- - - qui ſumſit, ſi non et cetera ſumet
Haec quoque quae data ſunt perdere dignus erat.

Qui recte hic procedunt, non ſecus ac poetae conuenientia ſibi fingunt etiam, et ſic translatis vtuntur

Summo ne medium medio ne diſcrepet imum.

Quae in praelectione breuiter indicata ſunt, his illuſtrantur.

(A.) *De potentiis exponentium fractorum, aut negatiuorum.*

Scilicet, formulae a^m duplex eſt ſignificatus, *alter* vt factor a vicibus m repetitus intelligatur, *alter*, vt ſit a^m, terminus conſequens rationis alicuius, cuius primus eſt 1; et quae ratio eſt *m* plicata ipſius 1: a; *Priori* ſenſu ſignum proprie ſaltim adhiberi poteſt, ſi m ſit integer poſitiuus; *altero*, locum habet, etiamſi ſit fractus vel negatiuus; Nam ſic v. g. a^{-3} proprie ſignificat conſequentem rationis, quae eſt oppoſita triplicatae ipſius 1: a. Antecedens vbique intelligitur 1; ſic $a^{+\frac{3}{4}}$ iubet, ſumi rationis 1: a tres quartas, et rationis, quae ſic prodit, oppoſita conſequentem habet $a^{-\frac{3}{4}}$. Exponens igitur proprie ſaltim eſt numerus factorum aequalium, ſi ſit integer poſi-

 tiuus

tiuus, aliis casibus, et hoc ipso, est numerus indicans, quoties sumenda sit ratio 1 : a; aut eius opposita, aut pars eius, vel ei oppositae.

(B.) *De transitu in oppositum per infinitum.*

1. Sit a quantitas constans positiua, x variabilis, detur *primo* a x = z, et decrescat x continuo, decrescet z, euanescet euanescente x, et fiet negatiuum, vbi x per o transit in negatiuum: *Secundo* $\frac{a}{x} = y$ et rursus decrescat x continuo, crescet y, et infinitescet euanescente x, et fiet negatiuum, transeunte x per o in negatiuum.

2. Concesso igitur transitu in oppositum per o, sequitur, vt detur transitus in oppositum per infinitum. Si a x transit in oppositum per o, sequitur vt $\frac{a}{x}$ transeat in oppositum per infinitum. At transitus in oppositum per o facilis intellectu videtur, ergo transitus in oppositum per infinitum est saltim consequens ex re intellectu facili.

3. Si statuitur, vt vulgo fit, $\frac{a}{o} = \infty$, erit $+\infty = -\infty$; nam $+o = -o$ Ergo $\frac{a}{+o}$ seu $+\infty = -\infty$. Hinc rectae positione datae duo puncta a dato puncto A (fig. 1.) infinito interuallo distantia, alterum ad partes B, alterum ad partes C, pro eodem habentur. Id etiam sic patet: si erigatur perpendiculum AD, et circa datum eius punctum D, gyretur DB recta, sic vt angulus ADB continuo crescat, abibit B in infinitum, et perueniet DB in situm DE ipsi AB parallelum, cuius DE pars retro producta sit DF. Iam dicuntur DE AB in infinito concurrere. Nulla vero ratio est hoc adserendi de rectis ad partes D, E, extensis, quae non idem dicere cogat de rectis ad partes C, F, extensis; Ergo parallelae etiam occurrere censentur ad partes C, F; Cum vero non possit recta rectae bis occurrere, vterque occursus, et adeo duo puncta infinita dissita, pro eodem habentur.

4. Haec, vt ostendatur, signis vt (3) acceptis, omnia sibi constare. Verus autem propositionis $\frac{a}{o} = \infty$ sensus est: quotientem $\frac{a}{x}$ quantamcunque libet magnitudinem adsequi, diuisore quantumcunque libet diminuto, et eandem magnitudinem, sed negatiuam, fieri quotientis $\frac{a}{-x}$, vt si quam minima mutatio exiguam positiuam $+x$ abire faciat in $-x$, eadem mutatio quotientem magnum positiuum, reddat aeque magnum negatiuum. Ipsius autem $\frac{a}{o}$ idea nulla est, non enim quaeri

potest,

poteſt, quoties contineatur nihil in aliquo. Scilicet hoc differt $\frac{a}{o}$ ab a. o quod a. o ſignificet nullam quantitatem ſumi, hoc eſt nihil, adeoque huic ſigno ſenſus aliquis ſubſit. Quaeſtioni: quid adſit, *ſi nulla quantitas ſumatur?* aut, quod eodem redit: *ſi quid non ſumatur*, ſatis perſpicue reſpondetur: *nihil;* illi: quoties nihil in aliquo continetur, reſponderi omnino non poteſt. Ceterum, per a. o non magis proprio ſenſu indicatur productum, quem per $\frac{a}{o}$ quotiens. Quodſi enim eſſent reuera producti a. o duo factores, qui exhibentur, cum ſit a. o = b. o eſſet a: b = o: o ſeu, nihila duo eſſent in data quauis ratione. Scio Eulerum hoc ex productorum, quae poſui, aequalitate intuliſſe; Inſt. Calc. Diff. §. 84; Sed vereor, vt haec lectoribus ſuis perſuadeat, contra erunt, qui de principio dubitabunt, ex quo adeo aduerſa cuiusuis ſenſui colliguntur, ac hoc eſt: nihilum vnum dimidium eſſe poſſe alterius. Qui ſignorum vim accuratius rimantur, in aequalitate a. o = b. o hoc ſaltim videbunt, nihil haberi, ſiue a non ſumatur, ſiue b, multiplicationem, et hinc colligendam proportionem non concedent.

5. Si ex eo quod 2. o = 3. o recte inferatur alterum nihilum continere duas tertias alterius, ſimili modo multa alia poſſunt demonſtrari, quibus ſenſus ratioque repugnent. Sit in fig. 2. Angulus ADB, triginta graduum; Igitur AB = $\frac{1}{2}$ DB. Cogitetur recta AB ſitu ſibi ſemper parello appropinquare puncto D, contineri vero perpetuo inter crura anguli triginta graduum; vno verbo; dicta DB = z; BA = y, detur aequatio y = $\frac{1}{2}$ z; conſtans igitur eſt ratio $\frac{y}{z}$ = $\frac{1}{2}$ quae manet adhuc, vbi z et y ſimul euaneſcunt in puncto D. An quia tunc AB et DB ſimul abeunt in punctum, dicetur: illud punctum D in quod abit AB, dimidium eſſe eius puncti D in quod abit DB?

Aut, ſi pro parabola ſit $\frac{y}{x} = \frac{a}{y}$, et euaneſcente y, fiat quotiens $\frac{y}{x}$ infinitus, dicetur: Ordinatam in vertice parabolae, eſſe punctum infinities maius puncto illo quod eſt abſciſſa in vertice?

Quaecunque oſtendis mihi ſic, incredulus odi.

HOR.

Nulli difficultati obnoxium eſt, rationem 2: 1 in exemplo rectae, conſtantem eſſe, quam habeant z: y etiam cum euaneſcunt, poſtquam vero non amplius ſunt lineae, nullam etiam earum quae non ſunt rationem eſſe; In parabola, ordinatam ad verticem accedentem, abſciſſa ſemper maiorem maioremque eſſe, aut: abſciſſam multo velocius decreſcere ordinata, ita vt minor abſciſſa in ordinata minore, tamen multo pluries con-

contineatur, quam maior abſciſſa in ordinata maiore, quotienti vero, qui indicet quoties decreſcens abſciſſa in ordinata decreſcente contineri poſſit, limites ſtatui poſſe nullos, in vertice nec abſciſſam eſſe nec ordinatam.

6. Verus igitur ſenſus tranſitus in oppoſitum per infinitum, hic eſt: Inde a communi termino, limite A, creſcunt ſimul duo quanta oppoſita AB, AC, quodnis vltra omnes limites adſignabiles valori eius, ſit vero AB poſitiua, et augeatur incrementis poſitiuis, erit AC negatiua et accedentibus ad illam poſitiuis minuetur; Si ergo, quod ſine fine continuari poteſt ipſius AB augmentum, fingatur AB infinitam reddere, et poſtquam hoc accidit, perpetuo eodem modo addendo poſitiua pergi ſtatuatur, primo quidem infiniti poſitiui AB, et negatiui AC, communis terminus ſtatui poteſt (3, 4;) deinde quae augmenta poſitiua, poſitiuam AB maiorem reddebant, eadem negatiuam AC dimminuent, vt, ſi variatio perpetuo eundem tenorem ſeruet, infinitam, quae creſcendo talis euaſerat, poſitiuam, ſequatur negatiua decreſcens.

7. Ex vulgato $\operatorname{tang}\eta = \frac{\operatorname{ſin}\eta}{\cos\eta}$ eruitur tangens anguli recti infinita, obtuſi negatiua. Reuera autem, angulus rectus nec Coſinum habet nec tangentem. Coſinum non habere vtique dico, cum dico eius coſinum eſſe = o, non enim habet, qui nihil habet. Hinc facile intelligitur tangentem etiam habere non poſſe. Tangentem anguli recti infinitam eſſe, nihil aliud dicit, quam anguli ad rectum creſcentis tangentem creſcere vltra omnes limites, ita vt coſinus infra omnes limites decreſcit. Eo momento quo angulus fit rectus, ceſſant notio tangentis et coſinus, hoc diſcrimine, quod in eum ſtatum vt coſinus motio ceſſet, res deducta ſit perpetuis decrementis coſinus, in eum vero vt ceſſet notio tangentis, perpetuis incrementis tangentis.

Illum angulum, cuius nec tangens eſt nec coſinus, ſequuntur obtuſi, quorum coſinus et tangentes ſunt quanta negatiua, initio quidem, coſinus valde parua, tangentes valde magna, ita vt anguli, rectum tantillum excedentis tangens poſſit eſſe quantumlibet magna.

Tranſitus igitur tangentis anguli acuti, in negatiuam obtuſi, per infinitam recti, nihil aliud dicit, quam anguli acuti ad rectum magis magisque accedentis, tangentem fieri quantumlibet magnam, obtuſi, rectum quantumlibet parum ſuperantis tangentem, etiam eſſe quantumlibet magnam, ſitu priori oppoſitam.

(C.) *Continuitas curuarum per aſymptotos, et obſeruata de continuitate et vnitate curuarum.*

1. Sint hyperbolae fig. 2. aſymptoti ECF, GCH, ſumatur in illa pro lubitu punctum A; igitur ſi mobile progrediatur in hyperbola ab A ad partes K in infinitum, perueniet in infinito in aſymptoton CE, quae ibi pro tangente habetur; ſimul vero erit (B; 3) in hac aſymptoto ad partes F in infinitum producta, vbi tangit aſym-

aſymptotus crus infinitum in quo eſt L; Igitur mobile redeundo ex aſymptoto per hoc crus deſcribendoque in hyperbola viam LM, et pergendo in infinitum in crure in quo eſt M, perueniet in aſymptoton CG in infinito crus, quod vltimo loco dixi tangentem, ſicque erit in hac aſymptoto verſus H in infinitum producta, vbi illa tangit crus infinitum in quo eſt N, et ſic in hoc crure regredietur verſus A, vt integram hyperbolam deſcribere poſſit motu continuo AKEFLMGHNA.

2. Aſymptotus EF, in infinito cenſetur tangere ſimul crura in quibus ſunt K et L; poteſt vero recta hyperbolam ſaltim in vnico puncto tangere, ergo haec duo loca contactus infinito interuallo remota habenda ſunt pro vno, quod pertinet rurſus ad (B, 3.) Sicque in infinito cuiusuis partis aſymptoti cum crure adiacente contactus habendus eſt pro contactu dimidio.

3. Simili modo aliae curuae aſymptotorum ope continuae fiunt, hoc eſt, efficitur, vt mobile a dato loco progrediens deſcribendo totam curuam, ad illum, vnde egreſſum eſt, locum redeat: Sed ne idem forte in omnibus curuis, ſaltim aſymptoticis, exſpectemus, reminiſcamur ſaltim curuarum non in infinitum progredientium, quae partes habent ita ſeiunctas, vt ex vna in alteram perueniri motu continuo non poſſit, vt inter alias curuas innumeras, ellipſis laſſiniana caſu eo, quo in duas coniugatas abit (v. Gregor. El. Aſtron. L. III. Prop. VIII. in additione p. 330. edit. Genev. 1726.) Similiter puncta curuarum coniugata, ita plerumque ſita ſunt, vt ex iis in curuam, et ex curua in illa, motu continuo perueniri non poſſit.

4. Quoniam puncta coniugata nominaui obiter indicandus eſt mihi error Crameri *Analyſe des Lignes courbes* §. 174. Ex. IV. Polum conchoidis habentis pro curuae puncto coniugato eo caſu, quo poli ab aſymptoto diſtantia (a) maior eſt, parte conſtante rectae deſcribentis inter a ſymptoton et polum intercepta (b). Eſt vero aequatio conchoidis apud eum $y^2 = \frac{(a+x)^2 (b^2 - x^2)}{x^2}$ vbi patet nullum dari y pro $x^2 > b^2$, et hinc ſi b ≷ a, nullum dari y, nullumque adeo curuae punctum pro $x = -a$; quo efficitur, polum hoc caſu curuae punctum non eſſe, adeoque nec punctum coniugatum. In errorem induxit Cramerum, quod credidit pro $x = -a$ ſemper fieri $7 = 0$; ſed cum in genere ſit $y = \frac{a+x}{x} \sqrt{(b-x)}$ perſpicuum eſt, ſi $b^2 < x^2$ et $x = -a$ prodituram $y = \frac{0}{x}$ ductum in impoſſibile. (*) At hoc indicat impoſſibile eſſe, vt y ita euaneſcat, cui ſimile exemplum habet Euler Mem. de l'Acad. de Pruſſe 1749. p. 209.

5. Igitur

(*) Vberius haec deinde explicaui, in elementis meis Analyſeos finitor. §. 489. ed. II. Gott. 1767.

5. Igitur curua *vnica* eſt, quae propterea non eſt *continua*. Ad vnam eamdemque curuam pertinent puncta omnia, quae communi quadam idea comprehenduntur, licet illa ſint in partibus curuae, quae nullo modo poſſint conterminae reddi. Cogitetur, curua Crameri l. c. §. 186. Ex. V. reuolui circa axem, cui parallelae ſumuntur y, naſcetur ſolidum, cuius ſectio facta plano huic axi parallelo, erit curua neceſſario habens duas partes penitus ſeiunctas. Hae *vnicam* curuam conſtituent, vtpote vnica idea ſectionis comprehenſae, *continuae* reddi non poterunt.

6. Quae art. praec. dixi, paulo inſolentius ita enunciat Iacob. Bernoullius. *Non abſurdum eſt, vnam eamdemque magnitudinem, in pluribus locis diſcretis et ſeparatis ſimul exſiſtere ſic duae curuae, non obſtante interuallo quo dirimuntur nonnunquam conſtituunt vnam eamdemque numero curuam, qualis eſt quae exprimitur per* $aax - x^3 = ayy$ (*). Eam curuam, cum ſit $y = \pm\sqrt{((a^2 - x^2).x)}$ facile intelligitur conſtare ex parte ouali reſpondente abſciſſis poſitiuis inde ab $x = 0$ ad $x = +a$; et ex parte contenta inter duo crura in infinitum diuergentia, reſpondente abſciſſis negatiuis ſine fine creſcentibus inde ab $x = -a$; Harum vero duarum partium in linea abſciſſarum diſtantia eſt illa ipſa abſciſſa $x = -a$. Ambae ſimul eamdem curuam conſtituunt, cum eadem aequatione contineantur, et complectantur ordinatas omnes quae abſciſſis omnibus, poſitiuis ac negatiuis reſpondent. Cramerus in nota eo loco ſubiecta dicit: „qui curuas has, vnam eamdemque numero curuam pronunciat, quoniam vna eademque aequatio vna vtriusque naturam mihi videtur ſignum cum re ſignata confundere.„ Non poterat negare Cramerus, eſſe has duas partes, vnam curuam conſtituentes, quae integra non eſſet, alterutra illarum partium remota, ſed haec dixit, contra illud Bernoullii, de magnitudine vna eademque pluribus in locis exſiſtente. Hic autem Bernoullius verbis luſit, vt in multis aliis propoſitionibus, quas diſputandi gratia, ſcriptis quae ex cathedra erant defendenda adiecit.

XII.

Theoria proiectionis ſtereographicae horizontalis.

d. 18. Ian. 1766.

Proponere Societati Regiae inſtitui, non vera omnino noua, ſed artis, quae a compluribus mathemathicorum feliciter exercetur, theoriam, quantum mihi conſtat, ſcriptis editis non adeo vulgatam. De tabulis loquor, e quibus pictos mundos ediſcimus. Eſt forma illarum, ſatis iam longo et frequenti vſu comprobata, cuius prae-

(*) Op. T. I. n. 54. epimetro 3; pag. 540.

praecepta, cum ignorare non poſſint, qui in delineanda tellure illa vtuntur, tamen parum adhuc de praeceptis illis, multo minus autem, et fere nihil, de cauſſis illorum ediderunt.

Curuam terrae ſuperficiem in plano exhibituri, arte vtuntur illa, qua pictores, regionem longe lateque excurrentem, montes et valles, exigua, illaque plana tabula repraeſentant. Perſpectiuam appellant artem, quae ſic oculos fallit, vt extendi in longinquum proſpectum exiſtimet, qui panno coloribus diſtincto coercetur. Redit autem ars eo, vt cogitemus, inter rem, quae ſpectatur, et oculum ſpectatorem, tabulam poni, per quam tranſeant lucis radii, ab obiecto ad oculum emiſſi, locaque, vbi tranſeunt per tabulam notentur, in quibus locis ſigna ponantur, illarum obiecti partium vnde tranſeuntes radii venerunt, ita ab his ſignis pertingentes ad oculum radii eundem ſenſum, ac ſi ab ipſis obiecti partibus emanaſſent, excitabunt in oculo ſitum radiorum, qui ſe feriunt, non diſtantiam vnde venerunt, percipiente. Iam, cum mutui tabulae, obiecti, et oculi ſitus, alii aliique eſſe poſſint, perſpicuum eſt, eiusdem obiecti alias aliasque fore picturas, vt ipſum, ex alio loco ſpectatum, aliter appareat.

Eadem ſi fieri cogitentur, in parte quadam ſuperficiei telluris delineanda, patet pro diuerſo tabulae et oculi poſitu, aliam aliamque futuram delineationem. Quae iam recepta eſt, et ad quam pertinet mea diſſertatio, huc redit: In parte ſuperficiei delineanda eligatur locus fere medius, quem illa pars, aequaliter quantum fieri poteſt, circumiaceat. Ducatur per illum locum diameter ſphaerae, cui perpendiculare planum per centrum ſphaerae tranſeat, circulum maximum in ſphaera effecturum; id planum tabula eſt, oculus vero in diametri, quam dixi, extremo ponitur, ſpectans per tabulam hemiſphaerium illa reſectum. Ita radiis lucis a ſingulis hemiſphaerii eius punctis ad oculum ductis, vbi per tabulam tranſeunt, ſignantur in tabula, punctorum illorum veluti imagines, quae coniunctae picturam exhibent, vel partis ſuperficiei ſphaericae, quam initio nominaui, vel integri etiam hemiſphaerii. In hac pictura, media eſt, et velut centri rationem habet, imago loci illius, quem ante dixi, in parte ſuperficiei delineanda, medium eſſe debere.

Picturas vero ad leges perſpectiuae factas, *proiectiones* appellari conſuetum eſt, cum obiecta, radiis ad oculum ductis, in tabulam veluti proiiciantur; Haec igitur, quam expoſui, *proiectio ſtereographica horizontalis* appellatur, diciturque fieri in horizontem eius loci, qui medius in tabula pingitur, eſt enim tabula loci eius horizon verus aſtronomicus.

Proiectionem hanc, olim iam cognitam, et Gemmae Friſio inprimis vſurpatam, primus fere in vſum reuocauit Io. Matthias Haſius, Vlmenſis, Vitebergae ante aliquot annos Mathematum Profeſſor, qui, cum profundiori matheſeos cognitioni, et inueniendi arti, linguarum hiſtoricaeque eruditionis copias iunxiſſet, vel in ipſa geographia antiqua plura vidit, quam qui omnem vitam in rerum antiquarum ſtudiis

triue-

triuerunt (*), delineatrici vero geographiae perfectionem ad quam pertingere poteſt, ſummam, conciliauit. Edidit Lipſiae anno huius ſaeculi decimo ſeptimo forma diſputationis *pro loco*, quam vocant, *Sciagraphiam tractatus de proiectionibus ſphaerarum*, qui tractatus ipſe nunquam prodiit. Ad leges huius proiectionis, et ab ipſo tabulae multae delineatae ſunt, et poſt eius mortem ab aliis, viris celebribus, Boehmio, Mayero, et Lowizio, cuius theoriam proiectionum ante multos annos ſperare iuſſerunt Commentarii Societatis Cosmographicae. Itaque, cum multa exſtent eius proiectionis ſpecimina, regulae in ſcriptis recentioribus mihi occurrerunt fere nullae, niſi quas Mayerus edidit in Atlante Mathematico Tab. XXX., ſed nec demonſtrationibus munitas, nec omnino concinne ſatis, et geometrice enunciatas, vt quae manum artificis delineaturi vtcunque dirigant, animum ab omni cauſſarum cognitione vacuum relinquant. Neque in manuſcriptis Mayeri, quae quidem videre mihi contigit, aliquid abſoluti reperi de illa arte, vnde primo nomen conſequutus eſt (**). Taedebat vero tabulas geographicas continuo tractare, quae quomodo vel conſtructae ſint, vel examinari queant, accuratius non noſſem, inprimis cum edita Lipſiae ante hos quatuordecim annos *perſpectiuae et proiectionum theoria generali analytica* (***) monſtraſſem, quaecunque ad hoc negotium pertinent, ita in poteſtate eſſem, vt computus, ſaltim pro cuiusuis proiectionis particularis conditionibus ſubducendus ſupereſſet. Praeterea quan-

(*) Temperare mihi non poſſum, quin hic adſcribam de Haſio iudicium Reiskii, V. Cl. in verſione germanica *der allgemeinen Weltgeſchichte* v. *Guthrie VI. Band I. Th.* (Lipſ. 1768.) nota p. pag. 884. 885. Ita vero ſe habent verba eius, vtcunque latine reddita: „Deficiente hiſtoria Hunnorum, quam gallice Deguignés edidit, vſui eſſe poteſt Io. Matth. Haſii phoſphorus hiſtoriarum, tabulas genealogicas plurimarum ſtirpium Arabicarum ex Herbelotii et aliis ſcriptoribus, ea in re principibus, multa induſtria, et inſigni veritatis ſtudio collectas continens. Neſciebat etiam Haſius linguam Arabicam, ſed Mathematicus, ſeueritate methodi ſuae adſueuerat, in omnibus exactam adhibere diligentiam, ſumma fide reddere, quae apud alios reperiſſet, disiectae membra hiſtoriae, debitis locis reponere, et corpori decenter aptare. Pollebat ea facultate, quae princeps eſt in hiſtoria, vt tempora, loca, homines, familias probe diſtingueret.“

Haec de Haſio, et de vi matheſeos in ingenio ad hiſtoriam formando, Vir alia longe eruditione quam mathematica clarus, ceterum parcus alias in laudando, vt ſunt, qui laudem ſciunt emere ſe poſſe meritis ſuis, non laudant, laudentur vt ipſi, et ſic permutando nundinationem quantam laudum exercent, vt illi apud Homerum, qui vina mercabantur

Ἄλλοι δὲ γινοῖς ἄλλοι δ' αὐτοῖσι βοέσσιν.

§. 2. Inſt. de Emt. et Vend.

(**) Mayerus iam Noribergae 1750. globum lunarem edendum ſuſceperat. Quae, ad eam rem pertinentia, imperfecta reliquit, vna cum variis eius manuſcriptis, AMICORVM REGIS, quibus ſalus prouinciarum germanicarum commiſſa eſt, munificentia ab heredibus redemit. Illa iam in obſeruatorio Gottingenſi adſeruantur.

(***) 1752.

quantitatum trigonometricarum calculus analyticus, quem Eulero debemus, tot tantaque commoda hic praebet, vt ne quidem, ſi prodiiſſet Haſii opus, ſupervacuum iudicarem huic diſquiſitioni compendia aptare, quae Haſii tempore nondum innotuerant. Haec ad ſphaericam figuram reſtrinxi. Sphaeroidica figura telluris non aliam methodum poſtulat, ſed calculum haud paulo difficiliorem, quem ſubire dum demum operae pretium fuerit, cum qualis haec figura ſit certius conſtet. De orthographica telluris proiectione ad figuram, quam Caſſinus telluri tribuerat oblongam, aptanda, paucula et imperfectiſſima habet P. Nicaſius Grammatici (*).

Ad ideam proiectionis ſtereographicae facilius ſibi formandam, ipſaque eius genera inueſtiganda, prodeſt globum terreſtrem adhibere.

Collocetur is in illum ſitum, quo ſphaeram *parallelam* exhibet, polo boreo, vt apud nos fieri aſſolet, Zenith occupante. Oculus collocetur in polo oppoſito, auſtrali puta, qui locum ipſius Nadir occupat. Ita horizon, cum quo coincidit aequator, terram in duo hemiſphaeria diuidit. Cogitetur reſectum inferius, planum vero horizontis, aut quod idem eſt, aequatoris, eſſe tabula vitrea, per quam transluceat hemiſphaerium ſuperius. Ita notatis punctis ſingulis huius tabulae, per quae ire debent radii a ſingulis punctis hemiſphaerii ad oculum, habetur eius hemiſphaerii proiectio *polaris* in aequatorem, qui eſt horizon poli.

Inuerſo globo proiicitur auſtrale hemiſphaerium.

Collocentur poli globi in horizonte, vt habeatur *ſphaera parallela.* Coincidet cum horizonte meridianorum aliquis, aequator vero erit horizonti rectus. Eligatur punctum aliquod aequatoris, quod in Zenith collocetur; oculus ſit in puncto illi oppoſito. Meridianus quadrante diſtans a Zenith et ab oculo; coincidet cum horizonte, eritque tabula, in quam eodem modo, vt ante, oculo proiicitur hemiſphaerium ſuperius, remoto inferiore inter illum meridianum et oculum.

Haec proiectio dicitur *aequatorea.*

Collocetur globus, vt decet, quo horizon eius exhibeat horizontem loci cuiusdam, nec in aequatore, nec ſub polis ſiti. Id *ſphaeram obliquam* vocant. Sit v. c. horizon globi, Londinenſis. Ita Londinum eſt in polo horizontis globi, et ſi cogitetur quadrans globo in eo loco, vbi eſt Londinum, affixus, circumuolui, extremum eius, in globo deſcribet circulum maximum, iam cum horizonte globi coincidentem, inter quem et Londinum continetur hemiſphaerium telluris. Sit rurſus oculus in

(*) Diſſertatio aſtronomica de ratione corrigendi typos et calculos eclipſium, mapparumque geograph. conſtructiones hucusque adhibitos in hypoth. telluris ſphaericae, cum iſta reapſe ſit figurae ſphaeroidalis. 1734. Auctoris nomen non legitur in hac editione, didici id ex Act. Erud. Lipſ. 1736. p. 189. ſcriptum Noribergae editum eſſe videtur. Reperitur etiam in Adelburneri Commerc. Aſtron. T. I. num. XII.

puncto globi, quod Londino opponitur, horizon aut circulus ille quem dixi maximus, fit tabula, remoueatur hemiſphaerium intra tabulam et oculum; ita huic oculo in illam tabulam proiicietur hemiſphaerium, quod iure dicunt, proiectum *in horizontem Londinenſem.*

Si locus diametraliter oppoſitus Londino Zenith occupet, Londinum Nadir, remoueatur autem iam hemiſphaerium inter Londinum et horizontem, oculo in Nadir conſtituto, proiicitur hemiſphaerium in horizontem Antipodum Londinenſium.

Ex triplici illo ſphaerae ſitu patet, cur has proiectiones etiam appellent *rectam obliquam parallelam*

Priores duae faciles ſunt, et ſaepius adhibitae. Obliqua in praxin deducta, Haſius imprimis bene de re geographica meruit. Qua opera quid conſequutus ſit, ita intelligitur: Sit exhibenda pars quaedam ſuperficiei terreſtris, nec aequatori vicina, nec polis, Germania puta. Ducantur in ſphaera duo illi meridiani, vltra quos nihil Germaniae ſitum eſt verſus orientem, aut occidentem; item duo paralleli, vltra quos verſus boream et auſtrum non extenditur. Ita habetur quadrilaterum ſphaericum, inter arcus duos meridianorum, duosque parallelorum Germaniam includens. Eius quadrilateri ſumatur medium, locus, in quo meridianus medius inter illos duos extremos, parallelus item medius inter duos extremos ſe interſecant. Ille locus cogitetur Zenith globi occupare, fiantque cum illo, quae ante dixi fieri debere cum Londino. Ita proiicietur hemiſphaerium telluris in horizontem eius loci Germaniae medii, qui *centrum proiectionis* fit. Patet vero, oculum ita id hemiſphaerium intueri, vt directe obiectam ſibi habeat Germaniam. Ita Germaniae pictura naſcitur, ipſi Germaniae, quam fieri poteſt, ſimillima. Quae vero remotiora ſunt a centro proiectionis, et obliquius obiiciuntur oculo, ea non poſſunt non magis deformari.

Polarem proiectionem, et aequatoream demonſtrat L. B. a Wolf, Element. Matheſ. Lat. T. IIII. Geogr. §. 272. 275. De obliqua nil habet, ſed partem telluris deſcripturum, iubet eius partis proiectionem in hemiſphaerio contentam debite ampliare. Ita vero praeter ea, quae oriuntur, dum figura minor ampliatur, id incommodi naſcitur, quod oculus, qui in proiectionibus, quas docuit Wolfius, ſemper directe polo aut aequatori imminet, ita oblique adſpiciat tabulam, v. c. Italiae aut Sueciae. Proiectio horizontalis efficit, vt cuiuis regioni, cuius pictura exhibetur, directe immineat, oculus.

Ita vero in euoluenda hac theoria verſatus ſum: Cum omnia nitantur formulis quibusdam perſpectiuae, illas, quibus vtor, demonſtrare debui. Adieci alia lemmata, ne, ſi in progreſſu operis eſſent oſtendenda, nexus interrumperetur. Quae ad elementa pertinent, ex meis citaui. Punctum autem ſphaerae conſideraui dari per meridianum, et per parallelum, in quibus ſimul eſt. Ita quomodo proiiciatur datum punctum oſtendi. Deinde obtinui ſingulas proiectiones meridiani et paralleli, et oſtendi quaecunque mihi innotuerunt ad faciliorem praxin proiectionum deſcribendarum,

rum, item, quibus haec proiectio aliis praeſtat. Sed, cum oculo in ſuperficie ſphaerae poſito, circulus quiuis in circulum proiiciatur, circuli cuiusuis proiectionem deſcribere docui. Quo cum complexus ſim, et quae ante ſeparatim de meridiano et parallelo oſtenderam, et infinitos alios circulos, malui tamen ab illis circulis initium facere, qui ſoli fere in mappis delineandis quaeruntur, ſicque ſtatim ad praxin progredi, quam ordiri a theoria, quae, cum ſphaerae reſpectu, generalior videretur, non tamen poſſet applicari ad alia corpora, rotunda etiam, quorum non quaeuis ſectio plano facta eſt circulus. Mea vero methodus, meridianorum et parallelorum proiectiones quaerens, ita comparata eſt, vt ſi quis taedia calculi non fugiat, his etiam corporibus poſſit adhiberi.

L e m m a I.

Problema.

Perſpectiuae geometricae theoriam continens.

Plano, quod *horizontem* appellabo, et hic fingam eſſe chartae planum, rectum ſit planum Q $\triangleq$ np, *tabula*, inſiſtens rectae $\triangleq$ np *fundamentali*. Dantur poſitio oculi O, et puncti M in horizonte, ductae ab M ad O rectae, quaeritur ſectio cum tabula I.

Sol. Ad definiendum oculi ſitum, cadat ex eo perpendiculum in horizontem, OS = a, ex S fundamentali ſit perpendicularis S T = d; recta futura tabulae (Geom. Pr. 47. Cor. 3.). Igitur planum per T S; S O; rectum eſt tabulae (Geom. Pr 47.), huiusque plani, et tabulae ſectio horizonti eſt recta (G. Pr. 48). Igitur ipſi O S parallela (G. Pr. 46.) et perpendiculum O R ex O in illam ſectionem, eſt = S T (G. Pr. 12. cor. 5.) et tabulae rectum (G. Pr. 47. cor. 1.) nec non R T = O S.

Porro ſit M N = δ perpendicularis fundamentali, adeoque tabulae. Sed M S ſecet fundamentalem in W, erit W I ſectio plani M S O et tabulae, recta horizonti, ob planum id, aeque ac tabulae planum, horizonti rectum. Vnde O S; I W parallelae ſunt, et M S: M W = O S: I W; ſed M W: M N = W S: S T, itaque terminos homologos ſummando M S: M N + S T = M W: M N et permutando M S: M W = M N + S T: M N; Igitur $IW = \frac{OS.MN}{MN+ST} = \frac{a\delta}{d+\delta}$

Dantur autem puncta T, N, vnde datur T N = n ſed

T S: M N = T W: W N, vnde

T S + M N: M N = T N: W N; ſeu

$WN = \frac{n\delta}{d+\delta}$ et $TW = \frac{nd}{d+\delta}$

Cor. 1. Sit L punctum perpendiculariter ſupra M eleuatum, altitudine $LM = \alpha$; ſecet vero LO tabulam in K; quaeratur IK *altitudo perſpectiua*. Patet enim, LMO planum, cuius ſectio cum tabula eſt IK; rectum eſſe horizonti, propter LM horizonti rectam, ſicque idem eſſe cum OMS plano cum eidem horizontis plano non poſſint recta eſſe duo diuerſa, ſectionem OM communem habentia.

Eſt vero $IK : LM = OI : OM = SW : MS = d : d + \delta$; Igitur $IK = \frac{\alpha d}{d + \delta}$.

Cor. 2. Vnde $WK = \frac{\alpha d + a\delta}{d + \delta}$

Cor. 3. Si altitudo oculi euaneſcat, ſeu

$a = o$; eſt $WK = \frac{\alpha d}{d + \delta}$

Schol. Si proiicienda ſit curua, ſita in plano dato, huius plani primo definiatur ſitus ad horizontem perſpectiuum, nempe interſectio eius cum hoc horizonte et inclinatio ad illum. Deinde, cum iam ſit L punctum quoduis curuae datae, eruantur α; δ; ex aequatione curuae quam datam eſſe ſumo, coniuncta, cum illis quae pertinent ad poſitionem plani in quo eſt curua. Id quomodo fiat, quiuis in doctrina de ſitu planorum ſatis verſatus facile intelliget. Ita vero dantur TW, WK, ex conditionibus curuae proiiciendae, et ſumtis TW, WK pro coordinatis proiectionis datur inter illas aequatio. Ea de re fuſius egi in perſpectiuae theoria analytica quam in praefatione citaui, et poſt appendicis loco adieci editioni germanicae ſyſtematis optici Rob. Smithii (*).

Lemma II.

Sit $CX = y$, $XI = x$; et detur aequatio

$$x^2 + y^2 + \alpha r x + \beta r y + \gamma r^2 = o$$

quaeritur curua illi reſpondens.

Sol. Pro tollendis primis variabilium dimenſionibus, fac $y = z - \frac{1}{2}\beta\gamma$; et $x = u - \frac{1}{2}\alpha r$; adeoque $z = y + \frac{1}{2}\beta r$; $u = x + \frac{1}{2}\alpha r$; quibus valoribus loco y et x ſubſtitutis, abit aequatio in

$$u^2 + z^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma).\ r^2$$

Eſt igitur curua circulus, radii

r. √

(*) Vollſtaendiger Lehrbegriff der Optik nach H. Rob. Smiths engliſchen, mit Anmerkungen und Zuſaetzen; Altenb. 1755.

r. $\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}-\gamma\right)}$ si haec quantitas sit possibilis, seu si

$$\alpha^2+\beta^2 > 4\gamma.$$

Illius circuli coordinatae ex centro sunt u; z; capta igitur $CG = -\frac{1}{2}\beta r$ et acta per G, ipsi GX perpendiculari $GK = -\frac{1}{2}\alpha r$; erit ducta KS ipsi GX parallela, $KS = y + \frac{1}{2}\beta r$. $SI = x + \frac{1}{2}\alpha r$; et K centrum.

Schol. Si $\alpha^2+\beta^2 = 4\gamma$, fit radius circuli = o seu circulus abit in punctum K. Scilicet tunc aequatio ita potest exprimi: $(x+\frac{1}{2}\alpha r)^2 + (y+\frac{1}{2}\beta r)^2 = o$ quae non est possibilis, nisi sit $x = -\frac{1}{2}\alpha r$; $y = -\frac{1}{2}\beta r$.

Lemma III.

Centro C; radio CF descriptus sit circulus, in cuius diametro per F, sumatur q punctum pro lubitu, item aliud Z circa quod radio ZM describatur alius circulus; quaeratur, quantus sumendus sit hic radius ZM; vt recta quaeuis per q ducta, qNG; resecet amborum circulorum arcus similes FG; MN;

Sol. Debet igitur esse FCG = MZN adeoque CG; ZN debent esse parallelae; vnde ob qNG rectam, qC: qZ = CG: ZN; itaque quaesitus radius ZN vel $ZM = \frac{CG.\ qZ}{qC}$ datus per quantitates datas, vbi CG = CF.

Ita vero reperto radio ZM descriptum circulum MNO, id perpetuo praestare, vt recta quaeuis per q; resecet arcus similes huius circuli, et eius circa C descripti facile confirmatur ducendo aliam rectam qOH; item radios ZO; CH; qui certe sunt in ratione radiorum ipsis aequalium ZN: CG; et adeo in ratione qZ: qC igitur ob qOH rectam paralleli, vt rursus fit MZO = FCH seu arcus MO; FH similes sint.

Cor. 1. Quoniam Z pro lubitu sumebatur, problema indeterminatum est, et eidem circulo FGH; innumeri respondent, vt MNO.

Cor. 2. Vt ex Z pro lubitu adsumto reperiebatur ZM; potest M adsumi punctum in quo secet circulus secundus diametrum prioris. Ita dantur q, M, puncta, et adeo qM; Hinc ZM. qC = CF. qZ abit in ZM. qC = CF. (qM — ZM) vnde reperitur radius quaesitus $MZ = \frac{CF.\ qM}{qC+CF}$

Cor. 3. Igitur si transire debeat secundus circulus per ipsum C, coeunt M et C; et fit $CZ = \frac{CF.\ qC}{qC+CF}$

Lemma IIII.

Sit EMC, circulus aliquis in sphaera cuius centrum O; diameter EC, polus A; Per polum ducatur circulus maximus AC; in cuius plano OAC, sit AN, continens angulum

angulum datum cum OA. Super eam, ad maximum AC; inclinetur planum, obliquum, ſecturum in ſphaera circulum AM; quaeritur M; interſectio huius circuli, et illius, cuius diameter eſt EC.

Dicam vero illum circa diametrum EC; *primum* circulum; *ſecundus* eſt maximus AC; *tertius* vel *obliquus* AM.

Sol. 1) Dicto radio ſphaerae = 1; ſit arcus AC; quo primus circulus diſtat a polo ſuo = φ; eſt radius eius OC = ſin φ, item AO = 1 — cos φ = 2. ſin $\frac{1}{2}\varphi^2$ (Trig. Pr. 19. cor. 8.).

2) AN inclinetur ad AO; angulo OAN = θ; eſt ON = AO. tang θ = 2. ſin $\frac{1}{2}\varphi^2$. tang θ.

3) Planum AMN; inclinetur ad circulum maximum, angulo η; igitur ex M demiſſa MH; plano ACO recta, occurret ipſi EC (Geom. Pr. 47. Cor. 2.) quod fiat in H; Sit porro MK perpendicularis in AN, erit iuncta KH; MKH inclinatio η.

4) Cum detur ON; (2) ſi innoteſcat angulus HNM; patet, ductam in hoc angulo NM; occurſuram primo circulo in M puncto quod quaeritur; item ad alteras diametri CE partes, in alio puncto W, cum circulus obliquus, primo debeat bis occurrere. Haec autem duo puncta M; W; habentur reperto angulo MNC; aut, quod eodem redit, eius contiguo WNC.

5) Poſſet etiam quaeri NH; aut HM; Sed horum quaeſitorum quoduis eſſet duplex, vnum ſpectans ad M; alterum ad W; itaque daretur aequatione quadratica. Hinc quaero angulum, qui ſimplex eſt.

6) In triangulo MKH; rectangulo ad M; eſt HM = HK. tang η; in triangulo HKN; rectangulo ad K; eſt HNK = ONA = R — θ; igitur NHK = θ, et HK = NH. cos θ; Proinde HM = HH. cos θ. tang η.

7) Itaque dicto angulo quaeſito (4) HNM = δ eſt $\frac{HM}{NH}$ ſeu tang δ = cos θ. tang η.

8) Si cogitentur iunctae OM; OW; in triangulo ONM eſt ſin OMN = $\frac{\text{ſin ONM. ON}}{\text{OM}}$ = $\frac{\text{ſin } \delta.\ 2.\ \text{ſin } \frac{1}{2}\varphi^2 \text{ tang } \theta}{\text{ſin } \varphi}$ Eſt vero ſin φ = 2 ſin $\frac{1}{2}\varphi$ cos $\frac{1}{2}\varphi$ (Trig. Pr. 19. Cor. 8.) vnde ſin OMN = ſin δ. tang $\frac{1}{2}\varphi$. tang θ

Propter OM = OW; eſt OWN = OMN.

9) Hinc dantur

$$COM = \delta - OMN$$
$$COW = 2R - \delta - OMN$$

vt ſit

vt ſit $\frac{COM + COW}{2} = R - OMN =$ angulo, quem contineret NM cum tangente circuli primi ad M.

10) AO; per circuli polum et eius centrum, vergit ad centrum ſphaerae, igitur θ eſt angulus, quem AN continet cum radio ſphaerae ad A ducto.

Corollaria.

11) Occurrat igitur AN producta, circulo maximo, et adeo ſphaerae, denuo in T; et capto arcu $TF = AC = \varphi$; polo T, deſcribatur circulus FQG, aequalis futurus primo CME; Huius circuli planum ſecet planum circuli maximi in FG recta, centrum eius ſit Q, perimetro vero, perimeter obliqui arcus AM occurrat in Q.

12) His poſitis, cum AT ſit chorda ſphaerae, radius ſphaerae ad T ductus, continebit ibi cum AT angulum $= \theta$ (10.) ille vero radius, cum tranſeat per circuli TZG polum, tranſit etiam per eius centrum, et eſt rectus plano eius circuli. Eſt igitur QT pars eius radii, et recta plano circuli FZG.

Igitur pro circulo FZG, T, Q, ſunt idem, quod A, O, ſunt pro circulo CME.

13) Itaque propter φ, θ, η; vtrinque eosdem aequales ſunt, qui per haec data eodem modo definiuntur, arcus FZ et CM.

Circulus FZG habebit adhuc alium polum, ſed patet, hunc, de quo ſermo eſt, ita ſitum eſſe, vt ambo circuli interiacēant polos ſuos A, T.

14) Si ſint deſcripti in ſphaera duo circuli CME, FCG, per eorum polos A, T, illos, quibus ambo interiacent, ſemper duci poteſt circulus maximus, quem efficiet planum poſitum per haec duo puncta et centrum ſphaerae.

15) Ergo, datis in ſphaera duobus circulis aequalibus CME, FZG, per eorum polos, quibus interiacent A, T, ducatur primo circulus maximus ACTGE, deinde quiuis obliquus AMZT, erunt inter hos duos circulos intercepti arcus $CM = FZ$.

16) Item, ſi per eosdem polos tranſeat ſecundus obliquus Amz T, erunt arcus $Cm = Fz$.

17) Vnde et inter duos obliquos intercepti arcus $Mm = Zz$.

Lemmata trigonometrica.

I. $\frac{\text{ſin } \varkappa}{1 + \text{coſ } \varkappa} = \text{tang } \frac{1}{2} \varkappa$

Demonſtr. In Trig. Prop. 19. Si $s = \text{ſin } \varkappa$ adeoque $1 + \text{coſ } \varkappa = 2 \text{ coſ } \frac{1}{2} \varkappa^2$ (ib. cor. 9.) eſt $\frac{\text{ſin } \varkappa}{1 + \text{ſin } \varkappa} = \frac{\text{ſin } \varkappa}{2 \text{ coſ } \frac{1}{2} \varkappa^2} =$

$$\frac{2 \text{ fin } \varkappa \text{ cof } \frac{1}{2}\varkappa}{2 \text{ cof } \frac{1}{2}\varkappa^2} = \text{tang } \frac{1}{2}\varkappa$$

Cor. $\frac{\text{fin } \varkappa}{1 - \text{cof } \varkappa} = \text{cot } \frac{1}{2}\varkappa$

Nam $\frac{\text{fin } \varkappa}{1 - \text{cof } \varkappa} = \frac{\text{fin } \varkappa . (1 + \text{cof } \varkappa)}{1 - \text{cof } \varkappa^2} = \frac{(1 + \text{cof } \varkappa)}{\text{fin } \varkappa}$

$= \text{cot } \frac{1}{2}\varkappa$ (Trig. def. 5. Cor. 1.)

II. $\text{cofec } \varkappa - \text{cot } \varkappa = \text{tang } \frac{1}{2}\varkappa$

Dem. Eſt enim $\text{cofec } \varkappa - \text{cot } \varkappa$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\text{tang } \varkappa^2}\right)} - \frac{1}{\text{tang } \varkappa} = \frac{\text{fec } \varkappa - 1}{\text{tang } \varkappa}$$

$= \text{tang } \frac{1}{2}\varkappa$ (Trig. Prop. 19. cor. 10.)

Cor. $\text{cofec } \varkappa + \text{cot } \varkappa = \text{cot } \frac{1}{2}\varkappa$.

Nam $(\text{cofec } \varkappa + \text{cot } \varkappa) . (\text{cofec } \varkappa - \text{cot } \varkappa)$

$= \text{cofec } \varkappa^2 - \text{cot } \varkappa^2 - 1$; Ergo $\text{cofec } \varkappa + \text{cot } \varkappa$

$$= \frac{1}{\text{tang } \frac{1}{2}\varkappa} = \text{cot } \frac{1}{2}\varkappa$$

III. $\frac{\text{Si } a + A}{b + B} = \frac{A}{B}$; quaero $\frac{a}{b}$

Sol. Ob $a . B + A . B = A . b + A . B$ eſt

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

IIII. $\frac{\text{Sin } \varkappa \pm \text{ fin } \varepsilon}{\text{cof } \varepsilon + \text{cof } \varkappa} = \text{tang } \frac{\varkappa \pm \varepsilon}{2}$

Dem. I. Ex Lemm. 1. $\text{tang } \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{\text{fin } \varepsilon}{1 + \text{cof } \varepsilon}$, $\text{tang } \frac{1}{2}\varkappa = \frac{\text{fin } \varkappa}{1 + \text{cof } \varkappa}$

Ergo ex Trig. Pr. 19. cor. 3;

$$\text{tang } \left(\frac{\varkappa \pm \varepsilon}{2}\right) = \frac{\text{fin } \varkappa . (1 + \text{cof } \varepsilon) + \text{fin } \varepsilon \, (1 + \text{cof } \varkappa)}{(1 + \text{cof } \varkappa) \, (1 + \text{cof } \varepsilon) . \left(1 - \frac{\text{fin } \varkappa . \text{ fin } \varepsilon}{(1 + \text{cof } \varkappa) . (1 + \text{cof } \varepsilon)}\right.}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}\text{fin } \varkappa + \text{fin } \varkappa . \text{ cof } \varepsilon \\ + \text{fin } \varepsilon + \text{fin } \varepsilon . \text{ cof } \varkappa\end{array}}{1 + \text{cof } \varkappa + \text{cof } \varepsilon + \text{cof } \varkappa . \text{ cof } \varepsilon - \text{fin } \varkappa . \text{ fin } \varepsilon}$$

$= \text{fin}$

$$= \frac{\text{sin } \varkappa + \text{sin } \varepsilon + \text{sin } (\varkappa + \varepsilon)}{1 + \text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon + \text{cos } (\varkappa + \varepsilon)} \quad \text{(Trig. Pr. 19. et Cor. 2.)}$$

Atqui, ex lemmate trig. I. eſt etiam

$$\text{tang } \frac{(\varkappa + \varepsilon)}{2} = \frac{\text{sin } (\varkappa + \varepsilon)}{1 + \text{cos } (\varkappa + \varepsilon)}$$

Qui duo valores cum ſint aequales, vltimi numerator, et denominator ſtatuantur A, B, lemm. trig. III. erit eiusdem lemmatis
$a = \text{sin } \varkappa + \text{sin } \varepsilon$; $b = \text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon$; itaque

$$\frac{\text{sin } \varkappa + \text{sin } \varepsilon}{\text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon} = \text{tang } \frac{(\varkappa + e)}{2}$$

II. Similiter, ex Trig. Prop. 19. Cor. 4; erit

$$\text{tang } (\tfrac{1}{2}\varkappa - \tfrac{1}{2}\varepsilon) = \frac{\text{sin } \varkappa . (1 + \text{cos } \varepsilon) - \text{sin } \varepsilon . (1 + \text{cos } \varkappa)}{(1 + \text{cos } \varkappa) . (1 + \text{cos } \varepsilon) . (1 + \frac{\text{sin } \varkappa . \text{ sin } \varepsilon}{(1 + \text{cos } \varkappa) . (1 + \text{cos } \varepsilon)})}$$

$$= \frac{\text{sin } \varkappa - \text{sin } \varepsilon + \text{sin } (\varkappa - \varepsilon)}{1 + \text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon + \text{cos } (\varkappa - e)} \quad \text{(Trig. Pr. 19. et Cor. 1.)}$$

$$= \frac{\text{sin } (\varkappa - \varepsilon)}{1 + \text{cos } (\varkappa - \varepsilon)} \quad \text{(Lemm. I.) Vnde rurſus ex}$$

(lemm. 3.) $\dfrac{\text{sin } \varkappa - \text{sin } \varepsilon}{\text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon} = \text{tang } \dfrac{(\varkappa - \varepsilon)}{2}$

Si $\varkappa$ minor ſit, quam ε, vltima tangens ſit negatiua, (Trig. Pr. 19. Cor. 4.); hoc eſt vbi in calculo obuenit $\pm \text{ tang } \dfrac{(\varkappa - \varepsilon)}{2}$

loco eius adhibetur $\mp \text{ tang } \dfrac{(\varepsilon - \varkappa)}{2}$

Cor. 1. $\frac{1}{2}\left(\text{tang } \dfrac{(\varkappa + \varepsilon)}{2} + \text{tang } \dfrac{(\varkappa - \varepsilon)}{2}\right) = \dfrac{\text{sin } \varkappa}{\text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon}$

Cor. 2. $\frac{1}{2}\left(\text{tang } \dfrac{(\varkappa + \varepsilon)}{2} - \text{tang } \dfrac{(\varkappa - \varepsilon)}{2}\right) = \dfrac{\text{sin } \varepsilon}{\text{cos } \varkappa + \text{cos } \varepsilon.}$

V. $1 \pm \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta = \text{cos } \dfrac{(\alpha \mp \beta)}{\text{cos } \alpha . \text{ cos } \beta}$

Dem. $1 \pm \operatorname{tang}\alpha.\ \operatorname{tang}\beta = 1 \pm \frac{\operatorname{sin}\alpha.\ \operatorname{sin}\beta}{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}\beta}$;

$$= \frac{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}\beta \pm \operatorname{sin}\alpha.\ \operatorname{sin}\beta}{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}\beta}$$

Vnde conſtat adſertum (Trig. Pr. 19. Cor. 1, 2.)

VI. $\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sin}\beta}{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta)}$

Dem. Eſt enim $\frac{\operatorname{sin}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} - \frac{\operatorname{sin}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha - \beta)} =$

$$\frac{\operatorname{sin}\alpha.\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta) - \operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{sin}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta)}$$

vbi ex Trig. Pr. 19. diuidendus eſt

$$= \operatorname{sin}(\alpha - (\alpha - \beta)) = \operatorname{sin}\beta$$

Cor. Eodem modo oſtenditur $\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sin}(2\alpha - \beta)}{\operatorname{cos}\alpha.\ \operatorname{cos}(\alpha - \beta)}$

Prop. I.

Sit C centrum ſphaerae, cuius diameter OCW = 2 r; Diametro in C rectum ſit planum circuli maximi HDTd, *Tabula.* Oculus ſit in O; quaeritur proiectio puncti cuiusuis L, in hemiſphaerio a tabula verſus W reſecto, in hanc tabulam.

Sol. 1. Sit P polus ſphaerae inter tabulam et oculum ſitus, ſeu *ante* tabulam poſitus, PCQ axis ſphaerae, erit Q *poſt* tabulam; planum per OW et PQ ſecet ſphaeram in circulo maximo OHQWTP; tabulam in HT recta. Erit HT *linea fundamentalis*, planum, quod dixi, *horizon perſpectiuus*, in quo, cum ipſe ſit oculus, oculi eleuatio ſupra horizontem eſt = o, diſtantia vero oculi a tabula CO = r.

2. Sumamus, vt imaginationi ſuccurratur, horizontem perſpectiuum eſſe in plano chartae, erit tabula chartae recta.

3. Q erit polus loco W in ſphaera proximus, et QWTP eius loci meridianus terreſtris (*) tranſiens productus per oculum. Sumo ſpectatorem, cuius eſſet hic oculus verſus W proſpicientem, ad ſui ſiniſtram habere polum P.

4. Per

(*) Scilicet, ſemicirculus inter polos, ille in quo eſt locus L. Aſtronomicus meridianus intelligitur circulus integer.

4. Per L tranſeat meridianus terreſtris QLP inclinatus ſupra horizontem perſpectiuum verſus ſiniſtram oculi eius, qui eſt in O, angulo acuto $= \lambda$.

5. Diſtet vero L punctum a polo Q, arcu $QL = \varepsilon$.

6. Demiſſa ex L in planum horizontis perſpectiui, perpendiculari LM, et ex L, M, in QP; TH cadentibus perpendicularibus LF; MN, erit in problemate praemiſſo, quod perſpectiuae geometricae theoriam continet

problematis	a	d	α	δ	x	y
hic	o	r	LM	MN	x	y

7. Sunt igitur ex ſphaerae conditionibus inueniendae LM; MN;

8. Sit oculi a polo P diſtantia arcus $OP = \varkappa = QW =$ complemento eleuationis poli vel latitudinis geographicae loci W, cuius loci horizon verus aſtronomicus eſt tabula.

9. Eſt $\frac{LM}{LF} = \text{ſin } \lambda$ (4.) vnde $LM = LF.\ \text{ſin } \lambda$

10. Iam $\frac{LF}{r} = \text{ſin } \varepsilon$ (5) Ergo (9) $LM = r.\ \text{ſin } \varepsilon.\ \text{ſin } \lambda = \alpha$ (6)

11. Pro MN inueniendo conſideretur fig. 2. exhibens planum meridiani per oculum, vbi PQ occurrit ipſi MF in F ad rectos (Geom. Pr. 56. cor. 6) et iuncta CM, eſt $MCN = MCF + QCN = MCF + R - \varkappa$ (8). Igitur $R - MCN = \varkappa - MCF$.

12. Eſt vero $MN = CM.\ \text{ſin } MCN = CM.\ \text{coſ } (\varkappa - MCF)$

13. Sed $\text{ſin } MCF = \frac{MF}{CM}$

14. Datis igitur CM, MF, datur quaeſitum.

15. Iam $CM = \sqrt{(r^2 - LM^2)} = r.\sqrt{(1 - \text{ſin } \varepsilon^2.\ \text{ſin } \lambda^2)}$ (10); $MF = LF.\ \text{coſ } \lambda = r.\ \text{ſin } \varepsilon.\ \text{coſ } \lambda$

16. Ergo $\text{ſin } MCF = \frac{\text{ſin } \varepsilon.\ \text{coſ } \lambda}{\sqrt{(1 - \text{ſin } \varepsilon^2.\ \text{ſin } \lambda^2)}}$

vnde $\text{coſ } MCF = \frac{\text{coſ } \varepsilon}{\sqrt{(1 - \text{ſin } \varepsilon^2.\ \text{ſin } \lambda^2)}}$

17. Itaque (Trig. Prop. 19. cor. 1.) $\text{coſ } (\varkappa - MCF) = \frac{\text{ſin } \varkappa.\ \text{ſin } \varepsilon.\ \text{coſ } \lambda + \text{coſ } \varkappa.\ \text{coſ } \varepsilon}{\sqrt{(1 - \text{ſin } \varepsilon^2.\ \text{ſin } \lambda^2}}$

18. Vnde (12) $MN = r\ (\text{ſin } \varkappa.\ \text{ſin } \varepsilon.\ \text{coſ } \lambda + \text{coſ } \varkappa.\ \text{coſ } \varepsilon)$ quod eſt δ (6.)

19. Pun-

19. Punctis T, N, perſpectiuae, reſpondent hic C, N, ergo quod ibi eſt n, hic eſt CN.

20. Eſt vero $CN = CM. \sin(\varkappa - MCF)$ (11) $= r\ (\sin \varkappa. \cos \varepsilon - \cos \varkappa. \sin \varepsilon. \cos \lambda)$ (Trig. Prop. 19. I; et hic 15; 16; 17;)

21. Igitur, ſi rectae, quae in probl. perſpect. et eius cor. 3. erant TW, WK; d ſint hic y; x; r eſt ex formulis ibi repertis, hic

$$x = \frac{\alpha r}{r + \delta} \quad ; \quad y = \frac{n r}{r + \delta}$$

22. Ex (18.) $r + \delta = r.\ (1 + \sin \varepsilon. \sin \varkappa. \cos \lambda + \cos \varepsilon. \cos \varkappa)$

23. Hinc ex 21; 10;

$$x = \frac{r \sin \varepsilon. \sin \lambda}{1 + \sin \varepsilon. \sin \varkappa. \cos \lambda + \cos \varepsilon. \cos \varkappa}$$

24. Et ex (20.)

$$y = \frac{r\ (\cos. \varepsilon. \sin \varkappa - \sin \varepsilon. \cos. \varkappa. \cos \lambda)}{1 + \sin \varepsilon. \sin \varkappa. \cos \lambda + \cos \varepsilon. \cos \varkappa}$$

25. Hinc dato loco puncti L in ſphaera, computari poſſunt y; x; ſicque datur eius proiectio.

Puncti ante tabulam reſpectu oculi poſiti, vt P, proiectio proprie non quaeritur; ſi vero deſideretur, habebitur eodem modo, transferendo ipſorum x et y valores ad illud punctum.

26. *Exemplum* I. Si cadat L in Q; erit $\varepsilon = 0$ et $x = 0$, ſed $y = \frac{r \sin \varkappa}{1 + \cos \varkappa} = r. \tang \frac{1}{2} \varkappa$ (Lemm. Trig. 1)

Igitur q proiectio poli poſt tabulam poſiti, cadit in ipſam quidem lineam fundamentalem, vt decet, in qua diſtat a C verſus H, ſeu dextram oculi O quantitate Cq hic definita.

Si deſideretur poli P proiectio, p, erit $\varepsilon = 2R$, hinc $\sin \varepsilon = 0$; $\cos \varepsilon = -1$; $x = 0$; $y = -\frac{r. \sin \varkappa}{1 - \cos \varkappa} = -r.$ $\cot \frac{1}{2} \varkappa$ (Lemm. Trig. I. cor.)

27. Ex 2. pro W; eſt $\lambda = 0$ et $\varepsilon = \varkappa$ vnde x et $y = 0$ vt decet cum ipſius W proiectio ſit C.

Prop. II.

Sit L in meridiano dato, quaeritur eius meridiani proiectio.

Sol. 28. Hic ponatur λ datus, et ex formulis 23; 24; eliminetur ε, prodibit aequatio inter x; y; pro λ dato.

29. Eſt

29. Eſt vero ex 23, 24;

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\varepsilon.\sin\lambda}{\cos\varepsilon.\sin\varkappa - \sin\varepsilon.\cos\varkappa.\cos\lambda} = \frac{\sin\lambda}{\cot\varepsilon.\sin\varkappa - \cos\varkappa.\cos\lambda}$$

vnde $x.\sin\varkappa.\cot\varepsilon = (y.\sin\lambda + x.\cos\varkappa.\cos\lambda)$ ſeu

$$\cos\varepsilon = \frac{y.\sin\lambda + x\cos\varkappa.\cos\lambda}{x.\sin\varkappa}\sin\varepsilon$$

30. Hanc valorem ſubſtituendo in 23. vbi

$x + x\sin\varepsilon.\sin\varkappa.\cos\lambda + x,\cos\varepsilon.\cos\varkappa = r.\sin\varepsilon.\sin\lambda$ fit.

$$x = \left(r.\sin\lambda - x.\sin\varkappa.\cos\lambda - x.\cos\varkappa.\frac{(y.\sin\lambda + x.\cos\varkappa.\cos\lambda).}{x\sin\varkappa}\right)\sin\varepsilon$$

duae vltimae partes factoris primi in producto dextro, fiunt

$$-x.\sin\varkappa.\cos\lambda - \frac{y.\sin\lambda.\cos\varkappa}{\sin\varkappa} - \frac{x.\cos\varkappa^2\cos\lambda}{\sin\varkappa}$$

$$= -\frac{x.\cos\lambda - y.\sin\lambda.\cos\varkappa}{\sin\varkappa}$$

vnde

$$\frac{x.\sin\varkappa}{r.\sin\lambda.\sin\varkappa - x.\cos\lambda - y.\sin\lambda.\cos\varkappa} = \sin\varepsilon$$

31. Hinc in 29; $\cos\varepsilon = \frac{y.\sin\lambda + x.\cos\varkappa.\cos\lambda}{r.\sin\lambda.\sin\varkappa - x.\cos\lambda - y.\sin\lambda.\cos\varkappa}$

32. Cum ergo ſit $\sin\varepsilon^2 + \cos\varepsilon^2 = 1$ ſequitur vt addita quadrata numeratorum, valorum, $\sin\varepsilon$; $\cos\varepsilon$; 30; 31; efficiant quadratum denominatoris communis.

33. Eſt vero ſumma quadratorum

$$x^2\left\{\begin{matrix}\sin\varkappa \\ +\cos\varkappa^2.\cos\lambda^2\end{matrix}\right\} + 2\,x\,y.\cos\varkappa.\cos\lambda.\sin\lambda + y^2\sin\lambda^2$$

Et quadratam denominatoris

$$x^2\cos\lambda^2 + 2\,x\,y.\cos\varkappa.\cos\lambda.\sin\lambda + y^2.\sin\lambda^2.\cos\varkappa^2$$
$$- 2\,r\,x.\cos\lambda.\sin\lambda.\sin\varkappa - 2\,r\,y.\sin\lambda^2.\cos\varkappa.\sin\varkappa$$
$$+ r^2.\sin\lambda^2.\sin\varkappa^2$$

34. Haec

34. Haec ſecundum 32; aequata et omnia ad vnum latus translata praebent

$$x^2.\ (\sin \varkappa^2 + (\cos \varkappa^2 - 1).\ \cos \lambda^2)$$
$$+ y^2.\ \sin \lambda^2.\ (1 - \cos \varkappa^2).\ = 0$$
$$+ 2\ r\ x.\ \cos \lambda.\ \sin \lambda.\ \sin \varkappa$$
$$+ 2\ r\ y.\ \sin \lambda^2.\ \cos \varkappa.\ \sin \varkappa$$
$$- r^2.\ \sin \varkappa^2.\ \sin \lambda^2$$

35. Eſt vero coefficiens ad x^2; $= \sin \varkappa^2\ (1 - \cos \lambda^2) = \sin \varkappa^2.\ \sin \lambda^2$ $=$ coefficienti ad y^2. Igitur diuidendo omnia per hunc coefficientem eſt

$$x^2 + y^2 + 2\ r\ \frac{x.\ \cos \lambda}{\sin \lambda.\ \sin \varkappa} + 2\ r\ y.\ \frac{\cos \varkappa}{\sin \varkappa} - r^2 = 0$$

ſeu

$$x^2 + y^2 + 2.\ \frac{\cot \lambda.}{\sin \varkappa}\ r\ x + 2 \cot \varkappa.\ r\ y - r^2 = 0$$

36. In fig. 1. ſumitur punctum L in ſemicirculo QLP, qui ſupra planum chartae in quo eſt HQTO, eleuatur angulo $WQL = \lambda$;

Is angulus initio ſtatuitur acutus verſus T. Cogitetur ſemicirculus, quem dixi, reuolui circa QP; vt creſcat ille angulus acutus vsque ad rectum, decreſcet $\cot \lambda$ vsque ad nihilum, fietque poſt negatiua, continuata reuolutione donec euadat λ iam obtuſus, aequalis duobus rectis, vbi illa contangens negatiua, creuit in infinitum.

Pro hoc igitur angulo obtuſo, ſed duobus rectis minore, coefficiens ad r x in aequatione (35.) eſt negatiuus.

37. Si continuetur adhuc reuolutio eadem lege, cadet ſemicirculus, in quo eſt L, infra planum chartae.

Hoc ſic exhiberi poteſt: Ipſius quadrantis DQ in ſphaera, productus ſit Qd; et in illo producto ſumatur L. Tunc patet, ſi intelligatur angulus WQd, menſurari ad partes obuerſas T puncto, eſſe eum angulum ita acceptum, duobus rectis maiorem, et quidem $= 2\ R + WQD$.

Vt ergo retineatur ipſius λ in aequatione ſignificatus ampliſſimus; ſit ille WQD, quem dixi, duobus rectis non maior, $= \theta$; eſt vel $\lambda = \theta$; vel $\lambda = 2\ R + \theta$.

De priore caſu agit (36.). De altero ex Trig. def. 2 Cor. 7. et def. 3. cor. 3. tenendum eſt, ſemper eſſe $\sin (2\ R + \theta) = -\sin \theta$; item $\cos (2\ R + \theta) = -\cos \theta$; Nam $\cos (2\ R + \theta)$ eſt negatiuus aut poſitiuus, prout θ eſt recto minor aut maior, hoc eſt prout $\cos \theta$ poſitiuus aut negatiuus.

Cum vero coſinus diuiſus per ſinum praebeat cotangentem, ſequitur, vt ſemper ſit $\cot (2\ R + \theta) = \cot \theta$.

38. Igitur eadem aequatio (35.) tenet proiectiones, arcus QD, et producti Qd, ſicque in illa habentur proiectiones omnium omnino meridianorum terreſtrium (quorum quiuis eſt ſemicirculus) ad vtrasque partes plani HQTO ſitorum.

39. D,

39. D, d, puncta, ſunt illa, in quibus ſecat tabulae peripheriam meridianus terreſtris, in quo eſt L; et eidem oppoſitus. Haec puncta ſibi ſunt diametraliter oppoſita, cum circuli maximi in ſphaera ſe biſſecent. Igitur DCd eſt recta, diameter ſphaerae; Porro D, C, d; ſunt ſimul in tabula: igitur quoduis horum punctorum eſt ſui ipſius proiectio, et rectae per illa transeuntis proiectio in tabula eſt ipſa DCd.

40. Situs autem puncti D, reperitur ſic: In triangulo ſphaerico QHD; ad H rectangulo, ex angulo $DQH = 2.R - \lambda$; et crure adiacente $HQ = TP = R - \varkappa$, quaere crus oppoſitum HD; (Trig. ſphaer. rectang. caſ. 8.) fit $\operatorname{tang} HD = -\operatorname{tang}\lambda . \operatorname{cof}\varkappa$; negatiuum indicat eſſe HD obtuſum, ſi ſit λ acutus.

Intelligitur autem eſſe DH + Hd ſemicirculum.

Haec pro ſitu puncti D in perimetro tabulae. Pro eius diſtantia a polo Q; in eodem triangulo quaeratur hypothenuſa, ex datis, crure $QH = R - \varkappa$; et angulo inter crus et hypothenuſam intercepto $HQD = 2R - \lambda$ tunc ex Trig. ſphaer. rectang. caſ. 6 fit

$\cot QD = -\operatorname{cof}\lambda . \operatorname{tang}\varkappa$; Vnde QD eſt quadrante maior aut minor, prout λ eſt acutus aut obtuſus.

41. Iam aequationi (35.) applicetur lemma II.

Eſt $\frac{1}{2}\alpha = \frac{\cot\lambda}{\operatorname{ſin}\varkappa}$; $\frac{1}{2}\beta = \cot\varkappa$; $\gamma = -1$; Vnde $CG = -\text{r.}\cot\varkappa$;

$GK = -\frac{\text{r.}\cot\lambda}{\operatorname{ſin}\varkappa}$; radius proiectionis $= \text{r.}\sqrt{\left(\frac{\cot\lambda^2}{\operatorname{ſin}\varkappa^2} + \cot\varkappa^2 + 1\right)}$

$= \text{r.}\frac{\sqrt{(\cot\lambda^2 + 1)}}{-\operatorname{ſin}\varkappa} = \frac{\text{r}}{\operatorname{ſin}\lambda . \operatorname{ſin}\varkappa}$ (Trig. def. 5. cor. 1) $= -\frac{GK}{\operatorname{cof}\lambda}$

(Trig. def. 5.)

Polorum proiectiones ſunt p; q (26.) per quas tranſit cuiusuis meridiani proiectio, cum quiuis meridianus tranſeat per polos.

Hae polorum proiectiones ex (35.) habentur, ponendo $x = 0$; vnde fit $y = -\text{r.}(\cot\varkappa \mp \sqrt{(\cot\varkappa^2 + 1)})$ et obtinentur valores, poſitiuus Cq; negatiuus Cp; prout adhibetur ſignum ſuperius aut inferius, quod intelligitur comparando (26.) cum lemmatibus trigonometricis.

Cum ſit $\frac{GK}{Kq} = \operatorname{cof}\lambda$; neglecto ſigno, quod rectae GK ſitum, et anguli λ conditionem, an acutus ſit, an obtuſus ſit, indicat, eſt vtique in triangulo GKq; anguli GKq coſinus $= \operatorname{cof}\lambda$; vel eius ſupplementum ad 2R prouti λ eſt acutus aut obtuſus.

42. Ex dictis proiectionis conſtructio haec eſt: Centro C fig. 3; radio CH deſcribatur circulus; is ſit tabula fig. 1. igitur $CH = r$; et C fig. 1; 3; ſunt puncta

eadem,

eadem, et HC, quantum opus eſt, producta, eſt linea fundamentalis, ſi vocibus perſpectiuae vtamur, hic autem eſt meridianus loci W fig. 1. cuius proiectio C fig. 3. eſt centrum proiectionis deſcribendae, et qui ſemper recta linea exhibetur, cum reliqui dent circulos. Dici igitur poteſt meridianus *centri proiectionis*, aut meridianus *rectilineus*. Sumatur ergo $CG = -\text{r. cot } \varkappa$; $GK = -\frac{\text{r. cot } \lambda}{\text{ſin } \varkappa}$; et centro K, radio $\frac{r}{\text{ſin } \lambda . \text{ ſin } \varkappa}$ deſcribatur circulus tranſiturus per q; item p; ſi id exhibeatur in conſtructione; (41.) ſecans perimetrum tabulae in D, d, punctis, ſibi diametraliter oppoſitis, in tabulae perimetro, erit dqD fig. 3. proiectio arcus dQD fig. 1; adeoque pars vtilis circuli centro K deſcripti (39.) reliquum inutile.

43. I. Haec, quo poſſint absque erroris periculo ad praxin transferri, oſtendendum adhuc eſt, ad quas partes CH rectae fig. 3. vergat GK negatiua aut poſitiua.

II. Id primo ſic explicari poteſt: Cogitetur fig. 1. ſpectator in O, proſpiciens verſus W; Is, cum ſit in plano OHWT; habet ad ſiniſtram ſui, et plani, quod dixi, arcum QD; ducta ad O recta, per tabulam tranſit, intra aream ſemicirculi, diametro HT; perimetro HDT contentam, ſitam ad ſiniſtram ſpectatoris; recta vero ex quocunque puncto arcus Qd; ad O ducta, ſecat tabulam intra aream ſemicirculi HdT; ad dextram ſpectatoris ſiti.

III. Cuiusuis igitur puncti arcus QD proiectio cadit ad ſiniſtram eius ſpectatoris, huius autem diſtantia a CH recta, eſt vnum ex x poſitiuis; quoniam in hac Prop. 2. conſiderantur x quatenus illam proiectionem definiunt. Igitur valor ipſius GK, ſi eſt poſitiuus, indicat, duci debere verſus easdem partes ſiniſtras ſpectatoris; ſi negatiuus, verſus dextras, verſus quas cadunt x definientia proiectionem arcus Qd.

IIII. Haec autem, vt applicentur fig. 3. cogitandum eſt, charta, in qua deſcribitur, poſita in ſitu horizontali, per C eductam eſſe verticalem, ſuperiora verſus vergentem ad W; inferiora verſus ad O. ſpectatorem itque in illa parte verticalis infra chartam producta poſitum, ſuperiora verſus proſpicere, ſic vt D punctum habeat ad ſui ſiniſtram. Tunc cadet GK ad eius dextram, ſi huius rectae valor ſit negatiuus, pro λ acuto.

V. Eadem facilius forte imaginationi exhibentur modo, qui ſequitur:

Cogitemus in fig. 1. Q eſſe polum borealem. Vt igitur HD/Td planum, ſit horizon aſtronomicus verus loci W; collocetur charta, in qua deſcripta eſt fig. 1. in ſitum verticalem, ita vt CW ſit verticalis, vergens ad Zenith, CQ vergat verſus polum arcticum, vel ſaltim verſus eas partes, ad quas ſitus eſt polus arcticus; Nam ſi fig. 1. non ſupponat eſſe W noſtram habitationem, non poterit nobis ſimul eſſe CW verticalis, et CQ axis mundi. Chartam in eo ſitu tenenti erit QLDP meridianus aliquis,

aliquis, orientalior illo in plano chartae HWTO; Qd vero erit meridianus occidentalior.

VI. Igitur in fig. 3. qD exhibere debet proiectionem arcus orientalis; qd occidentalis; ipsum q est proiectio poli borei.

Collocata igitur fig. 3. ita, vt collocari solent tabulae geographicae in situ horizontali, vt Cq cadat super meridianam, vergat autem versus boreale punctum horizontis, perspicuum est, perpendicula in CH demissa, ex punctis arcus qD; proiectionis meridiani orientalis, haberi pro x positiuis, adeoque KG cadere versus occidentem, aut orientem, prouti valor eius est negatiuus, posituus.

VII. Sit iam Q fig. 1. polus antarcticus, q eius proiectio. Si charta, super qua descripta est fig. 1. teneatur in situ verticali, sic vt CQ vergat versus polum boreum, CW sit verticalis vergens respectu nostri deorsum; erit plani HDTd facies puncto W obuersa, horizon alicuius eorum, qui habitant in hemisphaerio terrae australi. Is, si horizonti illi cogitetur pedibus insistere in C; oculos autem versus polum antarcticum dirigere, Zenith suum spectans iuxta CW, rursus habebit ad dextram suam arcum QD meridiani, qui suo est orientalior, ad sinistram arcum Qd meridiani occidentalioris.

VIII. Igitur fig. 3. exhibet proiectionem pertinentem ad hemisphaerium terrae australinum, si charta, super qua descripta est, cogitetur inuerti, vt situm habeat horizontalem, sed facies, in qua haec figura descripta est, respectu nostri sit inferior, HT sit meridiana, sed Cq vergat versus austrum in horizonte. Tunc si charta sit transparens, vt nos, qui superiorem eius faciem habemus nobis obuersam, tamen pellucere videamus figuram in altera descriptam, erit qD proiectio meridiani per polum antarcticum transeuntis siti versus orientem respectu loci eius in hemisphaerio terrae australi, in cuius horizontem iam sit proiectio, qd proiectio meridiani respectu eius loci, versus occidentem siti.

Exemplum.

Quoniam formulae analyticae supponunt sinum totum = 1; ad eum reducendi sunt tum sinus et tangentes naturales, tum harum linearum logarithmi. Vltimum fit subducendo 10. a logarithmis earum tabularibus.

Porro r seu radium tabulae, in quam fit proiectio sumam = 1; quantitates eo minores exprimam in eius centummillesimis.

Itaque interdum logarithmi ipsius r loco adhibebo s; logarithmorum vero, quos sic inuenio numeros, intelligam esse centummillesimarum radii tabulae.

His praemissis

sit W Vraniburgum, cuius igitur horizon sit circulus fig. 3; radio CH descriptus, ipsum vero centrum proiectionis C; sit proiectio Vraniburgi.

In eum horizontem proiiciendus sit meridianus Cayennae insulae Americanae, ea re in historia Astronomiae celebris, quod ibi primum in tardiori penduli motu,

rotationis terrae circa axem, indicium ſit animaduerſum, ab Aſtronomo Gallo D. Richer.

Quae ad ſitum geographicum locorum pertinent, ſumo ex ephemeridibus P. Hell. 1764.

Eſt igitur

eleuatio poli Vraniburgenſis $= 55^\circ\ 54'\ 15''$. qua ſubducta ex quadrante, neglectis ſecundis, habetur $\varkappa = 34^\circ\ 6'$.

Igitur pro proiectione poli

borei eſt $Cq = \text{tang}\ 17^\circ\ 3' = 0{,}3066851$

item $CG = -\cot 34^\circ\ 6' = -1{,}4769938$

Iam

Vraniburgum occidentalius Vienna	3°	30′	
Cayenna occidentalior - -	68	37	30
Cayenna occidentalior Vraniburgo	65°	7′	30″

Sume igitur $\lambda = 65^\circ\ 7'$ acutum, ſed verſus occidentem reſpectu meridiani centri tabulae

$s + \log \cot \lambda =$	$14{,}6663598 - 10$
adde $\log \text{ſin}\ \varkappa =$	$9{,}7486833 - 10$
$\log GK =$	$4{,}9176765$
ſubduc $\log \text{coſ}\ \lambda =$	$9{,}6240467 - 10.$
$\log Kq =$	$5\,2936298$

Itaque $GK = 0{,}82732$ poſitiua ob λ acutum, et centro K, radio Kq, deſcriptus arcus q d verſus occidentem, eſt proiectio meridiani Cayennenſis, quae quaeritur.

Is igitur meridianus productus verſus orientem, cum ipſo Vraniburgico continet angulum, qui ſit ſupplementum ad duo Rectos, eius, quem Cayennenſis verſus occidentem continet, hoc eſt

angulum $111^\circ\ 22'\ 30''$.

Quodſi igitur hoc angulo verſus orientem ad Vraniburgum inclinatus meridianus proiiciendus eſſet in horizontem Vraniburgicum,

formula analytica daret

$GK = -\dfrac{\cot 111^\circ\ 22'\ 30''}{\text{ſin}\ \varkappa}$ eiusdem valoris, qui ante repertus eſt pro meridiano Cayennenſi; ſed arcus hoc centro per q deſcripti adhibendo eſſet pars orientalis q D.

Radius meridiani proiecti cadit inter

1, 96620 et 1, 96630.

Ad ſolam figuram deſcribendam, eum computare non eſt opus, detur ob data puncta K; q;

Prop.

Prop. III.

Sit L in parallelo dato, quaeritur eius proiectio.

Sol. 44. Hic ex formulis 23, 24, eliminandus est λ posito ε constante

Est ergo (24)

$$y\,(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)+y.\sin\varepsilon.\sin\varkappa.\cos\lambda = r.\cos\varepsilon.\sin\varkappa - r.\sin\varepsilon.\cos\varkappa.\cos\lambda$$

$$\text{seu, } \frac{r.\cos\varepsilon.\sin\varkappa - y\,(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)}{r.\sin\varepsilon.\cos\varkappa + y\sin\varepsilon.\sin\varkappa} = \cos\lambda$$

45. Hoc valore adhibito in

$$x\cot\varepsilon.\sin\varkappa - x.\cos\varkappa.\cos\lambda = y.\sin\lambda \quad (29)$$

fit

$$x.\cot\varepsilon.\sin\varkappa - \left(\frac{x.\cos\varkappa.\,r.\cos\varepsilon.\sin\varkappa - xy.\cos\varkappa.(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)}{r.\sin\varepsilon.\cos\varkappa + y.\sin\varepsilon.\sin\varkappa}\right) = y.\sin\lambda$$

reductis, quae ad sinistrum latus sunt, ad idem nomen oritur fractio, cuius numerator

$$r.x.\cos\varepsilon.\sin\varkappa.\cos\varkappa + xy.\cos\varepsilon.\sin\varkappa^2$$
$$- r.x\cos\varepsilon.\sin\varkappa.\cos\varkappa + xy\cos\varkappa\,(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)$$

seu $= xy\,(\cos\varkappa+\cos\varepsilon)$; Est ergo

$$\frac{x.(\cos\varkappa+\cos\varepsilon)}{\sin\varepsilon.(r.\cos\varkappa+y.\sin\varkappa} = \sin\lambda$$

46. Cum ergo rursus sit $\cos\lambda^2+\sin\lambda^2=1$ quod rata numeratorum 44; 45; addita efficiunt quadratum denominatoris.

47. Est autem haec quadratorum summa

$$r^2.\cos\varepsilon^2.\sin\varkappa^2 - 2ry.\cos\varepsilon.\sin\varkappa\,(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)+y^2.(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)^2$$
$$+ x^2.(\cos\varkappa+\cos\varepsilon)^2$$

denominatoris vero quadratum, illi summae aequale

$$r^2.\sin\varepsilon^2.\cos\varkappa^2 + 2ry.\sin\varepsilon^2.\cos\varkappa.\sin\varkappa + y^2.\sin\varepsilon^2.\sin\varkappa^2$$

48. Reductis omnibus ad vnum latus est

$$x^2.(\cos\varkappa+\cos\varepsilon)^2 + y^2\left\{\begin{matrix}(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)^2\\ -\sin\varepsilon^2.\sin\varkappa^2\end{matrix}\right\}$$
$$-2ry\left\{\begin{matrix}\cos\varepsilon.\sin\varkappa\,(1+\cos\varepsilon.\cos\varkappa)\\ +\sin\varepsilon^2.\cos\varkappa.\sin\varkappa\end{matrix}\right\} = 0$$
$$+ r^2.\cos\varepsilon.\sin\varkappa^2. - \sin\varepsilon^2.\cos\varkappa^2$$

49. Coe-

49. Coefficiens ad y^2 eſt

$$1 + 2 \operatorname{cof} \varepsilon . \operatorname{cof} \varkappa + \operatorname{cof} \varepsilon^2 . \operatorname{cof} \varkappa^2 - (1 - \operatorname{cof} \varepsilon^2) . (1 - \operatorname{cof} \varkappa^2)$$
$$= 1 + 2 \operatorname{cof} \varepsilon . \operatorname{cof} \varkappa + \operatorname{cof} \varepsilon^2 . \operatorname{cof} \varkappa^2 - 1 + \operatorname{cof} \varepsilon^2 + \operatorname{cof} \varkappa^2 - \operatorname{cof} \varepsilon^2 . \operatorname{cof} \varkappa^2$$
$$= (\operatorname{cof} \varkappa + \operatorname{cof} \varepsilon)^2$$

50. Coefficiens ad $- 2 r y$ eſt

$$\operatorname{cof} \varepsilon . \operatorname{ſin} \varkappa + \operatorname{cof} \varepsilon^2 . \operatorname{ſin} \varkappa . \operatorname{cof} \varkappa + \operatorname{ſin} \varepsilon^2 . \operatorname{ſin} \varkappa . \operatorname{cof} \varkappa$$
$$= (\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa) . \operatorname{ſin} \varkappa$$

51. Coefficiens ad r^2, fit

$\operatorname{cof} \varepsilon^2 - \operatorname{cof} \varepsilon^2 . \operatorname{cof} \varkappa^2 - \operatorname{ſin} \varepsilon^2 . \operatorname{cof} \varkappa^2 = \operatorname{cof} \varepsilon^2 - \operatorname{cof} \varkappa^2 = (\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa) . (\operatorname{cof} \varepsilon - \operatorname{cof} \varkappa)$

52. Hinc aequatio 48; fit

$$x^2 + y^2 - \frac{2 \operatorname{ſin} \varkappa}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa} . r y + \frac{r^2 . (\operatorname{cof} \varepsilon - \operatorname{cof} \varkappa)}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa} = 0$$

53. Hic eſt Lemmatis Geometrici

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{- 2 \operatorname{ſin} \varkappa}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}; \quad \gamma = \frac{\operatorname{cof} \varepsilon - \operatorname{cof} \varkappa}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}$$

Eſt igitur pro hac proiectione in fig. 5. ipſi CG lemmatis geometrici hic reſpondens $CV. = \frac{r . \operatorname{ſin} \varkappa}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}$ poſitiua, et hinc capienda a C verſus q proiectionem poli Q; et cum ſit GK lemmatis hic $= 0$ eſt centrum proiectionis in V; radius vero

$$= \frac{r \sqrt{(\operatorname{ſin} \varkappa^2 - (\operatorname{cof} \varepsilon - \operatorname{cof} \varkappa) (\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa))}}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}$$
$$= \frac{r . \operatorname{ſin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa} = \frac{CV . \operatorname{ſin} \varepsilon}{\operatorname{ſin} \varkappa}$$

54. Ex aequatione (52.) poſito $x = 0$ ſit

$$\frac{y}{r} = \frac{\operatorname{ſin} \varkappa \pm \operatorname{ſin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}, \text{ vnde}$$

ſi proiectio occurrat rectae Cq in B, A; eſt

$$\frac{CB}{r} = \frac{\operatorname{ſin} \varkappa + \operatorname{ſin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \varkappa + \operatorname{cof} \varepsilon}$$
$$\frac{CA}{r} = \frac{\operatorname{ſin} \varkappa - \operatorname{ſin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \varepsilon + \operatorname{cof} \varkappa}$$

55. Haec

55. Haec ſi $\varkappa > \varepsilon$; ſi $\varkappa < \varepsilon$ valor ipſius CA fit negatiuus, indicio A cadere reſpectu ipſius C, ad partes oppoſitas illis ad quas cadit q.

56. Poſtquam conſtat, proiectionem eſſe circulum, facile inuenitur eius conſtructio ex conſideratione figurae 4.

Occurrat parallelus meridano per oculum in punctis a, b; quorum a iaceat reſpectu poli Q ad eas partes, ad quas iacet W; ductis Oa; Ob; erunt horum punctorum proiectiones A; B; Iam cum ſint $Qa = Qb = \varepsilon$, erit $Wb = \varkappa + \varepsilon$; $Wa = \varkappa - \varepsilon$; horum vero arcuum dimidia, menſurae ſunt angulorum ad peripheriam, WOb; WOa; et horum angulorum tangentes ſunt $\frac{CB}{co}$; $\frac{CA}{co}$; Igitur

$\frac{CB}{r} = \text{tang } \frac{\varkappa + \varepsilon}{2}$; $\frac{CA}{r} = \text{tang } \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}$; Hinc, ſi V ſit centrum proiectionis paralleli, eſt $\frac{1}{2}$ AB ſeu radius proi. par. $VA = VB$

$$= r.\ \tfrac{1}{2}\left(\text{tang } \frac{\varkappa + \varepsilon}{2} - \text{tang } \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}\right)$$

Item $\frac{CB + CA}{2}$ ſeu centri proiectionis paralleli a centro tabulae diſtantia

$$CV = r.\ \tfrac{1}{2}\left(\text{tang } \frac{\varkappa + \varepsilon}{2} + \text{tang } \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}\right)$$

57. Haec omnia, ſi ſit $\varepsilon < \varkappa$;
Si ſit $\varepsilon = \varkappa$, cadet a in W; et ſi ſit $\varepsilon > \varkappa$; cadet a vltra W reſpectu Q; ſeu infra W reſpectu eius, qui figuram intuetur.

Et ſimiliter A cadet infra C; ſeu ad partes oppoſitas iis, ad quas cadit q (55.) Tunc ſi adhibeantur formulae (56.) angulorum differentiae negatiuae tangens fit negatiua, vt in lemm. Trigon. 4. Quam reductionem, cum ſaepe obueniat, commodum eſt, ita generatim abſoluere:

$\frac{CA}{r} = \text{tang } \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}$ capienda reſpectu C ad partes oppoſitas iis, ad quas cadit q.

$$CV = r.\ \tfrac{1}{2}\left(\text{tang } \frac{\varepsilon + \varkappa}{2} - \text{tang } \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}\right)$$

$$VA = r.\ \tfrac{1}{2}\left(\text{tang } \frac{\varepsilon + \varkappa}{2} + \text{tang } \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}\right)$$

58. Cum ſit latitudo geographica, centri tabulae $= R - \varkappa$; paralleli $R - \varepsilon$; patet, reſpectu C puncti, cadere A et q ad partes easdem, aut oppoſitas, prout latitudo

tudo geographica centri proiectionis eſt minor aut maior, latitudine paralleli. Poſito parallelum et centrum proiectionis ſita eſſe ad partes easdem reſpectu aequatoris.

Si parallelus proiiciendus ſitus ſit ad partes aequatoris oppoſitas illis, ad quas ſitum eſt centrum tabulae, perſpicuum eſt, ε, quae diſtantia a polo Q fig. 1. computatur, eſſe quadrante maiorem, adeoque maiorem ipſo $\varkappa$.

59. Eadem, quae 56, 57., habentur ex formulis (54.) ope lemmatis trigometrici 4.

60. Si eſſe debet $CB > r$; oportet, vt ſit $\operatorname{tang} \frac{\varkappa + \varepsilon}{2} > 1$ adeoque $\frac{\varkappa + \varepsilon}{2} > \frac{1}{2} R$ ſeu $\varkappa + \varepsilon > R$; Hoc ergo caſu proiectionis pars cadit extra tabulae perimetrum, quam perimetrum ſecat proiectio in duobus punctis.

Scilicet ſi in fig. 1. cogitemus planum axi Q p rectum, inde a Q verſus C progredi, motu ſibi ſemper parallelo, ſecabit illud in ſphaera parallelos alios atque alios, quorum ille, pro quo eſt $\varepsilon = QH$, tanget tabulam in H; eritque vltimus omnium, qui toti iacent poſt tabulam. Hoc eſt, erit pro illo $\varepsilon = R - \varkappa$; Igitur $\frac{\varkappa + \varepsilon}{2} = \frac{1}{2} R$ cuius anguli tangens cum ſit $= 1$, fit in (60.) radius proiectionis $= \frac{1}{2} r. (1 - \operatorname{tang} (\varkappa - \frac{1}{2} R))$ et $CV = \frac{1}{2} r. (1 + \operatorname{tang} (\varkappa - \frac{1}{2} R))$, item $CB = r$. Hi paralleli proiectiones, ſuas totas habent intra tabulae perimetrum.

Si propius ad C fig. 1. accedat planum, quod dixi, axi rectum, ſecabit parallelos, tabulae perimetro occurrentes. Occurrat parallelus perimetro tabulae in E; igitur, ſi per Q et E cogitetur circulus maximus in triangulo ſphaerico QHE. ad H rectangulo dantur $QH = R - \varkappa$, $QE = \varepsilon$; vnde ex Trigon. meae ſphaer. rectang. caſ. 14., eſt $\operatorname{cof} EH = \frac{\operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{ſin} \varkappa}$.

Pro Parallelo tangente fit $R - \varkappa = \varepsilon$; vnde $EH = 0$. Si $\operatorname{cof} \varepsilon > \operatorname{ſin} \varkappa$, ſeu $R - \varepsilon > \varkappa$, ſeu $R > \varepsilon + \varkappa$ fit $\operatorname{cof} EH > 1$ quod, cum euenire non poſſit, indicat non dari EH; Seu paralleli et tabulae perimetros ſibi non occurrere, qui caſus eſt parallelorum, qui toti proiiciuntur.

Idem et ſic reperitur: Sit MY fig. 2. ſectio plani paralleli cum plano horizontis perſpectiui, vt Y ſit in CN recta; Patet ſi ſit $CY > r$ non poſſe paralleli perimetrum tabulae perimetro occurrere.

Eſt vero CYF angulus $= R - FCY$ et FCY ſeu $FCN = R - \varkappa$ vnde $CYF = \varkappa$ et $CF = CY. \operatorname{ſin} \varkappa$ Atqui $CF = CM. \operatorname{cof} CMF = r. \operatorname{cof} \varepsilon$ (15; 16.) Igitur $CY = \frac{r. \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{ſin} \varkappa}$ radio ſphaerae maius ſi $\operatorname{cof} \varepsilon > \operatorname{ſin} \varkappa$ vt ante.

Quod-

Quodſi ſecent ſe perimetri, paralleli et tabulae, manifeſtum eſt, partis ante tabulam reſpectu oculi ſitae, proiectionem non quaeri, hoc eſt, circuli circa V deſcripti partem vtilem ad proiectionem quaeſitam eſſe, quae intra tabulae perimetrum cadit, inutilem quae extra.

61. Ex formulis 56; 57; patet tunc demum fieri magnas CV; et radium proiectionis, cum ſit fere $\frac{\varepsilon + \varkappa}{2} = R$; ſeu $\varepsilon + \varkappa = 2.R$; Horum angulorum $\varkappa$ creſcere poteſt ad rectum, non vltra, ſed ε creſcere poteſt vsque ad 2R, progrediente in fig. 1. L puncto inde a Q verſus D; cum poſſit eſſe QD quadrante maior (40.) Vnde intelligitur, quibus caſibus valde magnae fiant, CV ac radius proiectionis paralleli.

62. Exemplum ad 56.

In horizontem Pariſinum ſit proiiciendus parallelus Vraniburgicus.

Propter eleuationem poli Pariſinam $= 48^\circ\ 50'\ 10''$; eſt $\varkappa = 41^\circ\ 10'$; hinc

$$Cq = \text{tang } 20^\circ\ 35' = 0,3755434.$$

Item	$\varkappa$	$=$	40°	$10'$	
	ε	$=$	34	6	
Summa	$=$		75°	16	ſemiſ $= 37^\circ\ 38'$
differ	$=$		7	4	ſemid $= 3^\circ\ 32'$
tang ſemiſ	$=$		$0,7710309$		$= CB$
tang ſemid	$=$		617466		$= CA$
ſumma tang	$=$		$0,8327775$		
different tang	$=$		$0,7092843$		
ſemiſ tang	$=$		$0,4163887\frac{5}{}$		$= CV$
ſemid tang	$=$		$0,3546421$		$= VA$

Ita deſcripta eſt fig. 5. vbi radius tabulae CH = 1, 00. Perimeter tabulae non exhibetur, vt ſpatio parcatur.

Prop. IIII.

Explicare originem et vſum circulorum, qui *diuiſores* appellantur.

63. Sit in fig. 6. a e b parallelus de cuius proiectione agitur Prop. 3. Polo O; diſtantia O h $= \varepsilon$ deſcribatur circulus h g f, cuius planum parallelum erit plano tabulae, cum eumdem habeat polum ac tabula.

64. Per Q et O tranſeat in ſphaera circulus Q e g O, occurrens parallelo in e, circulo (63.) in g; Igitur, cum per horum duorum circulorum, paralleli, et h g f; polos quibus interiacent Q, O, tranſeant, maximus quidem circulus, meridianus per oculum, obliquus vero Q e g O; erunt inter maximum et obliquum intercepti arcus quilibet a e, f g, aequales (Lemma IIII.)

65. Du-

65. Ductae ex O per ſingula puncta circuli f g h rectae, occurrent tabulae in ſingulis punctis, efficientque ibi huius circuli proiectionem, quae erit vtique circulus ipſi f g h parallelus, ſcilicet, baſis coni recti, cuius vertex eſt oculus, ſectio baſi parallela, circulus f g h.

66. Huius igitur proiectionis radius erit ad radium circuli f g h, vt diſtantia tabulae ab oculo, ad diſtantiam plani circuli f g h ab oculo; Igitur poſito ſphaerae radio = 1; cum ſit circuli f g h radius = ſin ε, diſtantia ab oculo = 1 — coſ ε = 2 (ſin $\frac{1}{2}\varepsilon$)^2 (Trig. Pr. 19. cor. 8.) erit radius proiectionis $= \frac{\text{ſin } \varepsilon}{2.\ (\text{ſin } \frac{1}{2}\varepsilon)^2} = \cot \frac{1}{2}\varepsilon$ (Trig. Prop. 19. cor. 5.) centrum vero proiectionis erit centrum ſphaerae.

67. Sit igitur haec proiectio in figura Lemmatis III; circulus radii CF = cot $\frac{1}{2}\varepsilon$ (66.) cadat vero F ſuper proiectionem meridiani per oculum, erit F proiectio puncti f fig. 6. planum autem fig. Lemm. eſt planum tabulae.

68. Si cogitetur conus rectus (65.), intelligitur, ducta ex O eius latera per f, g, occurrere baſi in plano tabulae concipiendae, ita vt ibi intercipiant arcum, ipſi f g ſimilem. Igitur, ſi in fig. Lemm. III. ſit arcus F G ſimilis arcui f g fig. 6, erit F G ipſius proiectio, poſito quod per ſe patet, capi G ad eas partes reſpectu F, ad quas capitur g reſpectu f; verbi cauſſa: ad orientem.

69. In fig. 6. cogitentur ductae ex O rectae ad Q, e, g; planique, in quo illae ſunt, cogitetur ſectio cum tabula. Intelligetur, ſectionem hanc, et adeo proiectionem arcus Q e g, fore rectam, ex q proiectione poli Q tendentem ad proiectionem puncti g; In hac igitur recta, in tabula ducta, eſt etiam proiectio puncti e, quod ſumitur in parallelo, atqui huius puncti e proiectio eſt etiam in proiectione paralleli, igitur ibi, vbi proiectioni paralleli occurrit, recta, quam dixi, ex q ducta.

70. Igitur in plano tabulae et fig. lemm. III. (67.) habeantur etiam proiectiones, q; poli Q fig. 1. et paralleli Prop. III. (26; 57.) Sit G proiectio puncti g (68.) ducta q G, ſecabit paralleli proiectionem in puncto quod eſt proiectio puncti e. poſito eodem, quod ponitur (68.)

71. Deſcriptis igitur in tabula fig. 5. circa V proiectione paralleli, circa C. vero circulo radii = tang $\frac{1}{2}\varepsilon$; vt eſt ille radii C F in fig. Lemm. III. diuidatur hic circulus inde ab F; in ſuos gradus cet. aganturque rectae ex q ad ſingula puncta diuiſionis, vt G; in fig. Lemm. III. reſecabunt eae in paralleli proiectione, inde ab A fig. 5; arcus qui erunt proiectiones arcuum paralleli ſimilium arcubus F G fig. Lemm. III.

72. Ab hac proprietate circulus, circa C deſcriptus, appellatur *diuiſor*. Et eum quidem vocabo: *diuiſorem tabulae concentricum.* Innumeros enim reperiri poſſe, manente q et parallelo eodem, iam intelligitur ex Lemm. III, quorum duos iam inueſtigabo.

73. Quae-

73. Quaeritur radius diuiſoris tranſituri per A; ſit ille circulus centri Z, quem exhibet figura Lemmatis tertii.

Igitur ſibi reſpondent

Lemm. III.	cor. 2	M	CF	qM
	hic	A	$\cot \frac{1}{2}\varepsilon$	qA

vnde radius diuiſoris quaeſiti, quem dicam f;

$$\text{fit} = \frac{\cot \frac{1}{2}\varepsilon . \; Aq}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa + \cot \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{Aq}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa . \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varepsilon + 1.}$$

Iam in lemm. Trig. 5. pone

hîc	α	β
	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{2}\varkappa$

ſit valoris ipſius f; denominator $= \frac{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}}{\operatorname{cof} \frac{1}{2}\varepsilon . \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varkappa .}$

Porro, adhibendo fig. 7. vbi A, q, cadunt ad diuerſas partes reſpectu C puncti (57) eſt $AC + Cq$ ſeu $Aq = \operatorname{tang} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2} + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa$

In corollario lemmatis Trig. 6. ſit

hic	α	$\alpha - \beta$
	$\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varkappa$	$\frac{1}{2}\varkappa$

vnde fit $Aq = \frac{\operatorname{ſin} \frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2} . \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varkappa}$; Igitur

$$f = \frac{\operatorname{ſin} \frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2} . \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varkappa} \cdot \frac{\operatorname{cof} \frac{1}{2}\varepsilon . \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varkappa}{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}}$$

quod propter $\operatorname{ſin} \frac{1}{2}\varepsilon . \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2} . \operatorname{ſin} \varepsilon$; abit in

$$f = \frac{\operatorname{ſin} \varepsilon}{2 . \left(\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}\right)^2}$$

74. Quaeritur radius diuiſoris, tranſituri per centrum tabulae.

Radius ille ex Cor. 3. Lemm. III. adhibitis quantitatum denominationibus huc pertinentibus eſt:

$$\frac{\cot \frac{1}{2}\varepsilon.\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa}{\cot \frac{1}{2}\varepsilon + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varepsilon.\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa}$$

Sit in Lemm. trig. 5.

	α	β
hic	$\frac{1}{2}\varepsilon$	$\frac{1}{2}\varkappa$

et valoris reperti denominator eſt $\dfrac{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}}{\operatorname{cof} \frac{1}{2}\varepsilon.\ \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varkappa}$;

Per hunc denominatorem inuerſum multiplicando numeratorem, obtinetur radius huius circuli diuiſoris $= \dfrac{\operatorname{ſin} \frac{1}{2}\varkappa.\ \operatorname{cof} \frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{cof} \frac{\varepsilon - \varkappa}{2}}$

75. Vt commodius capi poſſint in circulo diuiſore, alii aliique arcus, prodeſt computare chordam huius circuli, reſpondentem angulo alicui dato $= \zeta$; qua reperta facile habetur arcus quiuis, qui metiatur angulum multiplum ipſius ζ. Haec autem chorda ex trigonometria eſt $= 2$ f. ſin ζ vbi f ſignificat radium diuiſoris eius, de quo hic agitur.

Prop. V.

Tabulam geographicam ad leges proiectionis ſtereographicae horizontalis delineare.

Sol. 76. Nulla alia re opus eſt, quam vt colligantur praecepta huc vsque tradita, vt vno obtutu conſpici poſſint.

77. Eligatur locus W, fig. 1. in cuius horizontem fieri debet proiectio, vt eius loci proiectio C; ſit *centrum* tabulae, vel proiectionis. Eius loci latitudo geographica eſt $R - \varkappa$

78. Ducta recta, fig 7; et 11, quae exhibeat eius loci meridianum; Sumatur $Cq = r.\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varkappa$ erit q proiectio poli; ſi poli oppoſiti proiectio quaeratur, eſt pro ea $Cp = -\ r.\ \cot \frac{1}{2}\varkappa$ (26) fig. 1.

$$CG = -\ r.\ \cot \varkappa$$

Haec pro omnibus et ſingulis meridianis et parallelis eadem ſunt.

79. Pro meridiano (42.) fig. 11;

$$GK = -\ \frac{r.\ \cot \lambda}{\operatorname{ſin} \varkappa}$$

radius

radius proiectionis $= Kq = \frac{r}{\sin \lambda . \sin \varkappa} = - \frac{GK}{\cos \lambda}$

Signum — pertinet ſaltim ad ſitum rectae GK, ex conditione anguli λ definiendum. Hic vero ſitus facile cognoſcitur ex eo, an meridianus proiiciendus ſit orientalior, an occidentalior, angulumque contineat acutum, an obtuſum. Itaque, his conſideratis, negligi poteſt ſignum, et ſumi $GK = r. \frac{\cot \lambda}{\sin \varkappa}$

80. Pro parallelo habentur CV, CA, VA, ex 56; 57; in fig. 7. Sumendae ex 57.

81. Pro circulo diuiſore (73)

radius eius $= AZ = f = \frac{\sin \varepsilon}{2. \left(\cos \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}\right)^2}$

$CZ = f - CA$

chorda (73) $g = 2 f. \sin \zeta$.

82. Loci in tellure dati proiectio habetur in interſectione proiectionum meridiani eius et paralleli.

83. His abſoluta ſunt omnia, ſi poſtulatur: dato centro et dato interuallo deſcribere circulum.

84. Intelligitur autem ex 79. ſi ſit λ exiguus, fore GK, et adeo Kq ingentes. Meridianus centri proiectionis proiicitur in rectam, hoc eſt, in arcum circuli cuius radius eſt infinitus. Igitur meridiani, huic proximi, proiiciuntur in circulos radiorum valde magnorum.

85. Huic malo duo remedia ſuadet Haſius (*). Primum eſt, vt adſumatur tabulae radius quidam paruus, ita vt commode deſcribi poſſint circuli, radiorum reſpectu huius radii magnorum, deinde ope circini proportionalis, aut aliorum inſtrumentorum, quibus geometria in figuris delineandis vtitur, proiectiones ad debitam magnitudinem augeantur. Hoc quam lubricum ſit, non poteſt latuiſſe Haſium, igitur aliud remedium commendat, quod praeſtantiſſimum vocat.

86. Id redit ad circulos diuiſores Prop. 4. Quodſi enim parallelus vnus, ope circuli ſui diuiſus ſit, et alius ope ſui, et tertius, et ſic porro, dabitur proiectio meridiani inclinati angulo λ ad meridianum centri proiectionis, ſi connectantur puncta omnia parallelorum, quae angulo illi λ reſpondent.

87. Electo igitur loco, cuius proiectio eſſe debet centrum proiectionis C; in recta Cq; capiatur verſus q; CA pro parallelo aliquo pro quo eſt $\varkappa > \varepsilon$; et eadem magnitudo translata ad partes oppoſitas, dabit CA pro parallelo aliquo, pro quo eſt $\varepsilon > \varkappa$

(*) Sciagr. §. 44; 45.

Qui ſint hi paralleli, ſic reperitur: diſtet a polo primus quantitate δ, ſecundus quantitate Δ; Igitur erit CA pro primo tang $\frac{\varkappa - \delta}{2}$, pro ſecundo tang $\frac{\Delta - \varkappa}{2}$; adeoque $\varkappa - \delta = \Delta - \varkappa$, ſeu $\delta + \Delta = 2\varkappa$; vt $\varkappa$ ſit medium arithmeticum inter vtriusque paralleli diſtantias a polo.

88. Ita repertis CA; *parallelorum a centro diſtantiis*, et radiis parallelorum, qui plerumque non tam immanes fiunt, vt radii meridianorum, dantur ex (86) puncta parallelorum per quae tranſit meridianus datus.

Selectis tribus eiusmodi punctis, ſi habeatur gnomon, qui ad anguli cuiusuis magnitudinem aperiri poſſit, eius ope deſcribetur meridianus, vt magnorum circulorum arcus parui anguli ope deſcribuntur.

89. Computatur autem, antequam mappae deſcriptio inchoetur, tabula, continens parallelorum diſtantias et radios (88.), item radios circulorum diuiſorum, et, ſi ita videtur, chordas (75.). Haec Haſius.

90. Circulis per puncta aliquot inuenta (vt 88.) commode ducendis, cel. Lowizius adhibuit inſtrumentum, quod olim Soc. Scient. Goetting. oſtendit, laminam chalybeam in arcum curuatam, quam lamina alia recta craſſior, vt chorda arcum, ſubtendit. Ab vna ad aliam variis locis exeunt cochleae, velut perpendicula ab arcu in chordam demiſſa. Earum ope vehementius curuari poteſt lamina, vel ſibi ipſi, remiſſis cochleis magis permitti. Ita punctis aliquot v. c. meridiani, in charta ſignatis, applicantur totidem laminae curuae puncta et ab vno ad aliud, ad laminam, veluti regulam leſbiam, ducuntur arcus, reuera quidem curuae elaſticae portiones, ſed qui in praxi pro circularibus ſumi poſſint.

91. Circulo diuiſore tabulae concentrico vtuntur, qui aſtrolabiorum theoriam tradiderunt, eius ope, v. c. eclipticae aut horizontis proiectiones in gradus diuidunt. Vid. De Chales Mund. Math. T. IIII. (Lugd. 1674. fol.) in Tract. de Aſtrolabio L. IIII. Prop. 5; 9; 10; Tacquet (Op. Math. ed. Antu. 1707. fol.) Optices L. III. Poriſma poſt Prop. 9. it. Prop. 15. et alibi, item qui praxin ſaltim conſtruendi Aſtrolabii docet Stoflerinus in Elucid. Fabricae Aſtrolabii (Col. 1594.) fol. 28. Vocem circuli diuiſoris, et rationem illam ex vno innumeros deducendi, Lemmate III. exhibitam, apud hos auctores non reperi. Poriſma Tacqueti continet Lemmatis IIII. articulos 15; 17; operoſa ſyntheſi demonſtratos, quam ne legere cogerer, rem, vt in lemmate, analytice inueſtigaui. Haſius Sciagr. §. 27. ait in opere, cuius contenta recenſet, docturum ſe: inuenire radium pro circulo diuiſore paralleli, qui per ipſum punctum extremum diametri paralleli tranſeat, citatque Prop. VI. L. II. Clauii de Aſtrolabio. Ceterum de circulo diuiſore nihil hic aut alibi habet praeter nomen. Clauii opus rarius, hac occaſione fruſtra quaeſiui, ante parum de eo ſollicitus, cum ex Wolfio didiciſſem, conſtare id demonſtrationibus adeo intricatis, vt illi perlegendo

gendo patientia humana vix ſufficiat. Tacqueto iudice, me certe hac in re multo patientiore.

Eſt inter Manuſcripta Mayeri, de quibus dixi in praefatione, volumen, in quod ſub titulo collectaneorum geographicorum, et mathematicorum 1747. excerpſit ex variis libris longitudinum latitudinumque obſeruationes, et alia ad rem ſuam facientia. Ibi etiam legitur problema geographicum de inueniendis proiectionibus poli et paralleli, item circulo diuiſore, qui per extremum diametri proiectionis paralleli tranſeat. Regulae absque demonſtratione traduntur, vnice ad ſcopum praxeos. Sunt pro polo et parallelo, quas ante dedi, pro circulo diuiſore, inferre iubet, verbis eius in mea ſigna translatis: vt cot $\varkappa$ + tang $\frac{\varkappa + \varepsilon}{2}$ ad coſec $\varkappa$ ita radius proiectionis paralleli ad radium circuli diuiſoris. Deinde habet formulam (73.) et alias vſui minus aptas, quas examinare, operae pretium non duxi. De origine circuli diuiſoris, et de centro meridiani, vt de tota theoria nihil.

92. Mihi non omnino inutile videtur, obiter monere, quod aequationes proiectionum etiam ita poſſint adhiberi, vt computetur x reſpondens adſumto y, ſicque inueniantur proiectionum puncta.

Pro meridiano fit (35.).

$$x = -\frac{\cot \lambda}{\sin \varkappa} \cdot \frac{r \pm \sqrt{\left(r^2 \cdot (\cot \lambda^2 + 1) - 2 \cot \varkappa \cdot r y - y^2\right)}}{\sin \varkappa^2}$$

Pro paralleſo (52.)

$$x = \pm \sqrt{\left(1^2 \cdot \frac{(\cos \varepsilon - \cos \varkappa)}{\cos \varepsilon + \cos \varkappa} + \frac{2 \sin \varkappa}{\cos \varepsilon + \cos \varkappa} r y - y^2\right)}$$

93. Poterunt etiam, ſi detur $\varkappa$ pro centro proiectionis, pro loco cuius dantur ε; λ; computari x; y (ex 23; 24.), calculique huius taedia minui, adhibendo logarithmos ſinuum, reductos ad ſinum totum = 1; et denominatoris, qui duobus illis valoribus communis eſt, ſingulas partes ope logarithmorum computando. Poſſunt etiam forte valores ipſarum x; y; aptius ad hos calculos exprimi.

Exemplum ad §. 76. ſequ.

94. Sit fig. 1. W; Londinum; L, Kebecum Americae; ſeu ſit quaerenda proiectio Kebeci in horizontem Londinenſem. Iam ſunt eleuationes poli

Londini 51° 31'; vnde $\varkappa$ = 38° 29'
Kebeci 46 55 ε = 45 5

item $\frac{1}{2}\varkappa$ = 19° 14', 5; $\frac{1}{2}\varepsilon$ = 21° 32', 5
Vnde $\frac{\varepsilon + \varkappa}{2}$ = 40° 47'; $\frac{\varepsilon - \varkappa}{2}$ = 2° 18'

Lon-

Londin. occid. Vienna	16°	27′	45″
Kebec	86	15	30
Kebec occid. Londino	69	47	45

Ergo $\lambda = 69° 48.$

Radium tabulae r ſumo = 1; Itaque, ſi logarithmis vtor, eius logarithmus = o ſed ſi computandae ſunt rectae hoc radio minores, vt euitem logarithmos negatiuos, adhibeo 5 loco logarithmi huius radii, et obtineo logarithmos, quorum numeri exhibent rectas quaeſitas in centummilleſimis radii.

Sinum totum ſumo = 1, itaque logarithmos ſinuum et tangentium ſingulos imminuo numero 10; quod quomodo commode fiat ipſa calculi exempla docebunt. Eſt ergo ex adſumtis in fig. 7.

Pro q, poli borei proiectione

$Cq = \text{tang } \frac{1}{2} \varkappa = 0,3488893$

Pro meridianis omnibus

$CG = - \cot \varkappa = - 1,2579232.$

Pro meridiano Kebecenſi fig. 11.

$5 + \log \cot \lambda = 14,5657633 - 10$
$\text{ſubduc log ſin } \varkappa = 9,7939907 - 10$
$\log GK = 4,7717726$
$\text{ſubduc log coſ } \lambda = 9,5381943 - 10$
$\log \text{rad proiect} = 5,2335783 = \log Kq$

Sunt autem numeri reſpondentes

log GK; 59125; log Kq inter 171230 et 171240

cum ergo hi numeri ſint centummilleſimarum ipſius r; eſt poſito r = 1.

$GK = 0,59125; \quad Kq = 1,7123$

Intelligitur etiam, non opus eſſe ad figuram deſcribendam computari Kq; cum detur magnitudine ex ipſa figura.

Has rectas exhibet figura 11, vbi radius tabulae CT = 1, 2 digiti rhenani. Ita I eſt locus Kebeci.

Pro parallelo Kebecenſi, fig. 7.

$\text{tang } \left(\frac{\varkappa + \varepsilon}{2}\right) = 0,8626693 = CB$

$\text{tang } \left(\frac{\varepsilon - \varkappa}{2}\right) = 0,0401641 = CA \ (57)$

Summa = 0,9028334

differ

differ = 0, 8225052
semisumma = 0, 4514167 = VA
semidiff = 0, 4112526 = CV

Pro circulo diuisore

log cos $\left(\frac{\varepsilon - \varkappa}{2}\right)$ = 9, 9996500 — 10
eius duplum = 19, 9993000 — 20 subduc a
5 + log sin ε = 4, 8344597

log 2 f. = 4, 8351597 adde ad
log sin 34°54′ = 9, 7575068 — 10

log chordae 69°48′ = 4, 5926665

Cum hi logarithmi respondeant numeris centummillesimarum ipsius r; est posito r = 1. 2 f = 0, 68416; f = 0, 34208 = AZ. Chorda in circulo diuisore subtendens arcum 69° 48′; = 0, 39144. Igitur ope huius chordae determinetur arcus circuli diuisoris = 69° 48′ inde ab A; per eius arcus extremum, et q, ducatur recta, occursura proiectioni paralleli in eo puncto, in quod cadit proiectio Kebeci.

Si desideretur eiusdem circuli diuisoris chorda, 5°.

log 2 f = 4, 8351597 adde ad
log sin 2° 30′ = 8, 6396796 — 10

3, 4748393.

igitur illa chorda = 0, 029841.
cuius vsus esset ad circuli diuisoris peripheriam in quinos gradus diuidendam.

Transibunt autem, vt decet, per idem punctum proiectionis paralleli, et recta, quam ante dixi, ex q ducta per punctum circuli diuisoris, quod terminat arcum 69°48′; et circulus centro K, quod, quomodo inueniatur, ante dictum est, per q descriptus.

Haec duo in fig. 7. simul exhibere non licuit, quoniam vt omnia distinctius conspicerentur, radium tabulae adhibui paulo maiorem, aequantem 5, 1 digiti rhenani in partes mille diuisum, vt v. c. huius scalae contineat Cq millesimas 349.

Exemplum ad §. 93.

95. Grenouicum occidentalius Vienna 16° 20′
Londinum 16° 27′ 45″

Grenouicum orientalius Londino 7′ 45″
sumo λ = 8′

Grenouici eleuatio poli 51° 28′ 30″
89 59 60.

38 31 30
Sumo ε = 38° 31′

Pro denominatore (23; 24.)

log cof ε = 9, 8934439 — 10
log cof $\varkappa$ = 9, 8936448 — 10

5 + Summa 4, 7870887

Igitur cof ε. cof $\varkappa$ = 0, 61247

log ſin ε = 9, 7943083 — 10
log ſin $\varkappa$ = 9, 7939907 — 10
log cof λ = 9, 9999988 — 10

5 + Summa = 4, 5882978

Igitur ſin ε. ſin $\varkappa$. cof λ = 0, 38752
adde 0, 61247
et 1

ſit denominator communis 1, 99999
loco cuius ſumi poteſt 2.

Pro computando x

log ſin ε = 9, 7943083 — 10
log ſin λ = 7, 3668157 — 10

5 + Summa = 2, 1611240

Igitur ſin ε. ſin λ = 0, 000724 = x; poſito r = 1.

Si denominator eſſet numerus maior, per quem diuiſio non tanta breuitate perageretur, eius logarithmus, ſubductus a logarithmo reperto, daret ipſius x logarithmum.

Pro computando y.

log cof ε = 9, 8933433 — 10.
log ſin $\varkappa$ = 9, 7939907 — 10

5 + Summa = 4, 6873340

Igitur cof ε. ſin $\varkappa$ = 0, 48678

log ſin ε = 9, 7943083 — 10
log cof $\varkappa$ = 9, 8936448 — 10
log cof λ = 9, 9999988 — 10

5 + Summa = 4, 6879519

Igitur ſin ε. cof $\varkappa$. cof λ = 0, 48747
quo ſubducto ex 0, 48678

fit valoris ipſius y numerator = — 0, 00069
eoque diuiſo per 2 fit
y = — 0, 00034.

Signum

Signum negatiuum indicat Grenouicum auſtralius eſſe Londino.

Capta igitur in meridiano Londinenſi, inde a centro proiectionis, Londino verſus auſtrum, longitudine o, 00034, et per eius extremum, ducto verſus orientem perpendiculo = o, 00072 habebitur Grenouicum. In figura qua vtor, ob paruitatem radii tabulae, id exhiberi non poteſt.

Vltimae figurae in his computis, vt notum eſt, incertae ſunt, hic igitur, vbi locum proiiciendum, eſt centro proiectionis adeo propinquum ſumſi, vt x, y; minores ſint partibus milleſimis, illarum ipſarum valores, non ſatis tuti ſunt. Sed mihi ſufficit calculi exemplum dediſſe.

Ceterum illa figurarum vltimarum incertitudo, et obuenire poteſt in definiendis centris; et radiis circulorum methodi vſualis, et certe in poſitu proiectionis determinando, non maiores errores producet iis, qui naſci poſſunt, dum in vſuali methodo plures circuli deſcribuntur, lineae ducuntur cet.

Si exacte proiiciendus ſit locus aliquis, qui non cadat in aliquem meridianorum, et parallelorum retis forte deſcripti, de quo infra (103), crediderim, methodum, quam hic explicaui, non omni vſu carituram.

Prop. VI.

Proiectionem, et partem ſphaericae ſuperficiei proiectam inter ſe comparare.

Sol. 96. Polo W deſcriptus ſit in ſphaera circulus diſtans a polo W arcu circuli maximi = φ; erit radius eius circuli = r. ſin φ et planum circuli a puncto W diſtabit quantitate r. $(1 - \text{cof}\,\varphi) = \text{r. ſin vers}\,\varphi = 2\,\text{r. ſin}\,\frac{1}{2}\varphi^2$ (Trig. Prop. 19. cor. 8.); Vnde ſuperficies ſphaerica plano eius circuli reſecta, inde a puncto W; eſt $4\,\pi\,\text{r.}^2\,\text{ſin}\,\frac{1}{2}\varphi^2$ (Geom. Prop. 65.). Conus rectus, cuius vertex ſit O, baſis, circulus quem dixi, cogitetur fectus plano tabulae baſi parallelo, erit fectio hinc nata, circulus continens proiectionem ſuperficiei ſphaericae priore, quem dixi, circulo verſus W reſectae.

Proiectionis huius area eſt ad aream circuli reſecantis partem ſuperficiei ſphaericae proiectam, in ratione duplicata diſtantiarum planorum illorum, ab O puncto, hoc eſt in ratione $\text{r}^2 : \text{r}^2.\ (1 + \text{cof}\,\varphi)^2 = 1 : 4.\ \text{cof}\,\frac{1}{2}\varphi^4$ (Trig. Prop. 19. cor. 9.)

97. Radius proiectionis eſt ad radium baſis coni, (96.), vt diſtantia proiectionis a vertice O; ad baſis diſtantiam, ſeu radius proiectionis: r. ſin φ = r : 2 r. cof $\frac{1}{2}\varphi^2$ Vnde radius proiectionis

$$= \frac{\text{r. ſin}\,\varphi}{2.\,\text{cof}\,\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{\text{r. 2 ſin}\,\frac{1}{2}\varphi.\ \text{cof}\,\frac{1}{2}\varphi}{2\,\text{cof}\,\frac{1}{2}\varphi^2} = \text{r. tang}\,\frac{1}{2}\varphi$$

Itaque area proiectionis eſt $\text{r}^2.\ \pi.\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2$

Sunt igitur areae ſuperficiei proiectae, et proiectionis in ratione 4. ſin $\frac{1}{2}\varphi^2$: tang $\frac{1}{2}\varphi^2 = 4.$ ſin $\frac{1}{2}\varphi^2 : \frac{\text{ſin } \frac{1}{2}\varphi^2}{\text{cof } \frac{1}{2}\varphi^2}$

$= 4.$ cof $\frac{1}{2}\varphi^2 : 1.$

98. Ita ſi $\varphi = 90°$; cof $\frac{1}{2}\varphi =$ ſin $\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et ratio arearum fit $4. \frac{2}{4}$: $1 = 2 : 1.$ vt decet, cum dimidiae ſphaerae ſuperficies hic proiecta, ſit duplum circuli maximi, in cuius aream proiicitur. Itaque area tabulae dimidia eſt ſuperficiei hemiſphaerii in tabula exhibiti.

99. Si arcui φ reſpondeat ſuperficies ſphaerica $= S = 4\pi r^2.$ ſin $\frac{1}{2}\varphi^2$ (95.) eius autem ſuperficiei proiectio aream habeat $= f$; eſt $f = \frac{S}{4.\text{ cof } \frac{1}{2}\varphi^2}$ ſimiliter ſi arcui ξ reſpondeant, ſuperficies ſphaerica T; area proiectionis $= t$; eſt $t = \frac{T}{4.\text{ cof } \frac{1}{2}\xi^2}$

Itaque ex doctrina compoſitionis rationum (Arithmet. cap. 5.) ratio $f : t$ componitur ex $S : T$ et cof $\frac{1}{2}\xi^2 :$ cof $\frac{1}{2}\varphi^2$, ſeu: areae proiectionum ſunt in ratione compoſita, ex directa ſuperficierum proiectarum, et reciproca duplicata coſinuum arcuum dimidiorum, quibus a loco medio proiectionis diſtant circuli terminantes ſuperficies proiectas; Hoc eſt

$$f : t = S : T + 2. (\text{cof } \tfrac{1}{2}\xi : \text{cof } \tfrac{1}{2}\varphi) \text{ ſeu}$$

$$f : t = S : T + 2. \left(\frac{1 : \text{cof } \frac{1}{2}\varphi}{\text{cof } \frac{1}{2}\xi}\right)$$

100. Pro ξ, φ, exiguis ſunt cof $\frac{1}{2}\xi$. cof $\frac{1}{2}\varphi$, fere $= 1$ eſtque fere $f : t = S : T$ ſeu proiectiones ſunt fere in ratione ſuperficierum proiectarum.

Ex. Sit $\varphi = 10°$, $\xi = 18°$ eſt

$$\begin{array}{lll} \log \text{cof } \frac{1}{2}\varphi & = 9,9983442 & - 10 \\ \log \text{cof } \frac{1}{2}\xi & = 9,9946199 & - 10 \end{array}$$

$$\frac{\log \text{cof } \frac{1}{2}\varphi}{\log \text{cof } \frac{1}{2}\xi} = 0,0037243$$

cuius duplum $= 0,0074486 = \log \frac{\text{cof } \frac{1}{2}\varphi^2}{\text{cof } \frac{1}{2}\xi^2}$

qui quotiens igitur eſt $= 1,017.$

ſeu $f : t = (S : T) + (1 : 1,017)$ quae ratio adhuc parum differt a ratione $S : T.$

Prop.

Prop. VII.

Si non integrum hemiſphaerium delineetur, quid requiratur, vt C ſit in medio proiectionis enumerare.

Sol. 101. Meridianus igitur O W P medius eſſe debet inter duos alterum angulo λ orientaliorem, alterum angulo λ occidentaliorem, qui proiiciuntur vt 79.

Parallelus vero per W, medius eſt inter duos diſtantes a polo Q, arcubus $\varkappa - \mu$; $\varkappa + \mu$, (88.) Poſito ergo primo $\varepsilon = \varkappa - \mu$, et deinde $= \varkappa + \mu$, proiiciuntur illi vt 89.

102. Perſpicuum eſt, non proiici partem ſphaerae dimidia maiorem; ſeu in fig. 1. L non poſſe diſtare a W vltra quadrantem. Si quis ſitu mutuo locorum non ſatis examinato in loci W horizontem, ſumeret proiiciendum L; vltra 90. Gradus diſtantem, erroris ſui admoneretur ipſa conſtructione, eſſet enim illa exhibitura proiectionem loci L, a centro tabulae longius diſtantem radio r; ſeu extra perimetrum tabulae cadentem.

103. Si plurium parallelorum, quorum quilibet a proximo diſtet dato interuallo, puta 5. graduum, delineentur proiectiones, et ſimilia fiant cum meridianis, habebitur *rete*, cui inferi poterunt proiectiones locorum ſingulorum, quorum datur longitudo et latitudo.

Eiusmodi rete ex dictis facile quiuis pro lubitu delineabit.

104. Ita habetur proiectio obliqua (94), cui ſi addatur rete (103), retique loca debite inſerantur, habebitur hemiſphaerium telluris, in exemplo proiectum in horizontem Londinenſem. Tales proiectiones in horizontem Noribergenſem et ei oppoſitum dedit Lowizius in planiſphaeriis ſumt. hered. Homann. editis.

Multo faciliores ſunt proiectiones reliquae duae, de quibus iam breuibus.

Prop. VIII.

Proiectiones, polaris et aequatorea.

I. Polaris.

105. Si W ſit in polo ſphaerae, O in oppſito, proiectio dicitur polaris, fig. 8.

Hic $\varkappa = 0$; vnde in Prop. 3.

$Cq = 0$; $CG = \infty$; $GK = \infty$, rad proi $= \infty$.

Hoc indicat, proiectiones meridianorum eſſe rectas per C tranſeuntes, arcus ſcilicet circulorum, quorum radii infiniti ſunt. Illarum vero rectarum poſitus melius cognoſcitur ex 29. vbi $\frac{x}{y} = -\frac{\text{ſin } \lambda}{\text{coſ } \lambda} = -$ tang λ. vnde $x = -y$. tang λ.

Patet igitur, diuiſa peripheria radio r circa C deſcripta in gradus cet. ſi ſit T H proiectio meridiani dati, qui reſpondeat ipſi T W Q fig. 1. nulla alia re opus eſſe, quam

quam vt capiatur arcus T t respondens angulo λ, versus eas partes, versus quas iacet meridianus alter, qui proiici debet respectu meridiani dati, tuncque alterius meridiani proiectionem esse t q.

Pro parallelo ex (61.) est C V = 0; et radius proiectionis = r. tang $\frac{1}{2}$ ε.

Exemplum.

Sit fig. 8 hemisphaerium proiectum boreale, vergatque adeo C H versus boream; Sit T C H meridianus Vraniburgensis, et sint designandae proiectiones Vraniburgi, et Cayennae. Igitur (Prop. 2. Ex.) Cayenna occidental. Vraniburgo 65° 7′ 30″. tot partium circuli capitur arcus T t; versus occidentem.

	eleu. poli	ε	$\frac{1}{2}$ ε
Vranib.	55° 54′ 15″	34° 6′	17° 3′
Cayenn.	4 56	85 4	42 32

Igitur radius paralleli

Vraniburgensis = r. tang 17° 3′ = r. 0, 3066851

Cayennensis = r. tang 42° 32′ = r. 0, 9174020

Proiectio aequatorea. fig. 9.

106. Dicitur vbi oculus est in aequatore, sicque tabula meridianus, rectus meridiano per O W fig. 1.

Igitur ϰ = 90° vnde in Prop. 3. posito r = 1

C q = 1, C G = 0; G K = — cot λ; radius proiectionis meridiani = cosec λ

Pro parallelo ex 53.

$$C V = \frac{1}{\cos \varepsilon} = \sec \varepsilon$$

radius proiectionis = tang ε

Harum duarum rectarum differentia C A = sec ε — tang ε seu, vt applicari possit lemma Trig. 2.

= cosec (R — ε) — cot (R — ε) = tang $\left(\frac{R - \varepsilon}{2}\right)$, quod est distantia paralleli a centro proiectionis.

Itaque, datis tabulis tangentium et secantium, habentur centra et radii proiectionum absque vllo calculo, si r sit sinus totus tabularum, et resecando numerorum repertorum figuras dextimas, habentur quanta pro r = 100000, aut = 10000 cet.

Exemplum.

Sit T H meridianus Vraniburgensis; Igitur, cum Vraniburgum vtique sit in meridiano suo, erit eius distantia a C aequalis distantiae paralleli Vraniburgensis a centro = tang $\left(\frac{55° 54′}{2}\right)$ = tang (27° 57′) = 0, 5194584.

Quodsi

Quodsi in hac proiectione exhiberi deberet Cayenna: centrum paralleli Cayennensis a centro proiectionis distaret quantitate sec 85° 4′, quae radium tabulae continet 11, 6 vicibus.

Vt igitur omnia exhibere possim in spatio, quo circumscribor, eligo locum polo propinquum, Tobolskam Sibiriae; est vero

Tob. orientalior quam Vienna	=	52° 2′ 30″
Vranib. occident. - -		3° 30′
Tob. orientalior quam Vranib.		53° 32′ 30″
igitur λ =		53° 32′

Praeterea latitudo Tobolsk =
58° 12′ 30″ vnde ε = 31° 47′ 30″
Itaque, dicto sinu toto tabulari vel r = 1

GK	= —	0,7390611
CV	=	1,1764070
VA	=	0,6196236.

107. Ita negotium absoluitur, adhibendo scalam v. c. in 1000. partes diuisam. Constructionum enchireses, quae scala non indigent, sed diuisionem peripheriae in gradus postulant, nudas exhibet Mayerus in Atlante mathematico Tab. XXX. eae sic potuerunt inuestigari.

Pro meridianis.

Ducatur in fig. 10, ba diameter perpendicularis ipsi CH; Sumatur arcus bf arbitrarius est angulus baf = $\frac{1}{2}$ bf, et hinc, cum sit aC = 1 est Ce = tang $\frac{1}{2}$ bf. Capiatur CK = Ce; et centro g, radio gH; describatur circulus HK erit is proiectio meridiani, inclinati ad eum, quem exhibet CH, angulo cuius cotangens est CK; Est vero CK = cot (R — $\frac{1}{2}$ bf). Quodsi ergo desideretur, vt HK sit meridianus inclinatus angulo λ est λ = R — $\frac{1}{2}$ bf sicque bf = 2 (R — λ) Si sit λ $\prec$ $\frac{1}{2}$ R; est 2 (R — λ) $\succ$ R, itaque manente arcus bf, initio b, semper in loco suo, finis eius f; cadit in quadrantem Ha, et e cadit in CH productam; K vero in Cb productam, eo remotius a C; quo minor est λ.

Quaeratur meridianus pro quo sit λ = 80°; capiendus est bf = 20°.

Pro parallelo.

Ex §. 80. est hic

$$CV = \frac{1}{2}\left(\text{tang}\left(\frac{R+\varepsilon}{2}\right) + \text{tang}\left(\frac{R-\varepsilon}{2}\right)\right)$$

Capiantur ad vtrasque partes ipsius H; Hf = Ht = ε; Si cogitetur ducta aH, est angulus CaH = $\frac{1}{2}$ R; angulus vero faH = Hat = $\frac{1}{2}$ ε. Igitur si rectam

rectam CH secent rectae as; at; in r; n; erit $Cr = \text{tang}\left(\frac{R+\varepsilon}{2}\right)$; $Cn = \text{tang}\left(\frac{R-\varepsilon}{2}\right)$ vnde bissecta nr in V; erit CV media arithmetica inter illas duas tangentes; sicque V centrum proiectionis paralleli transiturae per s; t.

108. Similem constructionem proiectionis obliquae exhibet Mayerus l. c. quam aeque facile esset ex formulis praecedentibus deducere. Wolfii regulae, de quibus in praefatione dixi, coincidunt cum Mayerianis. Patet autem, constructiones tales ab iis, quae formularum et scalae ope fiunt, ita differre, vt horologiorum descriptiones, quas geometricas vocant, a trigonometricis, trigonometricas vero, imprimis, si maiora horologia describenda sint, omnes praeferunt.

Prop. IX.

Proiectio cuiusuis meridiani secat proiectionem cuiusuis paralleli ad angulos rectos.

109. Sit I fig. 11. punctum aliquod commune meridiano cuidam, et parallelo; eorum centra sint K; V; Quodsi ostendi possit, summam quadratorum, radiorum, meridiani et paralleli aequari quadrato distantiae centrorum, seu $KI^2 + IV^2 = KV^2$, erit semper $KIV = R$; itaque tangent, VI meridianum KI parallelum, adeoque ambo circuli secabunt se ad rectos.

110. Est vero $KV^2 = GV^2 + GK^2$; Iam

$$GV = CG + CV = \cot \varkappa + \frac{\sin \varkappa}{\cos \varepsilon + \cos \varkappa} \qquad (42; 53;)$$

quibus additis et scripto $\frac{\cos \varkappa}{\sin \varkappa}$ loco $\cot \varkappa$;

$$\text{fit } GV = \frac{\cos \varepsilon . \cos \varkappa + 1}{\sin \varkappa . (\cos \varepsilon + \cos \varkappa)}$$

Eius igitur quantitatis quadratum additum ad

$$\frac{\cot \lambda^2}{\sin \varkappa^2} \quad (42) \quad \text{dat } KV^2$$

111. Iam summa quadratorum radiorum proiectionum ex 53; 41; est

$$\frac{\sin \varepsilon^2}{(\cos \varepsilon + \cos \varkappa)^2} + \frac{1}{\sin \lambda^2 . \sin \varkappa^2}$$

112. Quadratum radii meridiani et sic exprimi

$$\text{potest } \frac{\operatorname{cosec} \lambda^2}{\sin \varkappa} \text{ (Trig. def. 5. cor. 1)} = \frac{1}{\sin \varkappa^2} + \frac{\cot \lambda^2}{\sin \varkappa^2}$$

113. Ita-

113. Itaque huius ſummae quadratorum pars ea, quae datur absque λ; eſt

$$\frac{\sin \varkappa^2 . \sin \varepsilon^2 + (\cos \varepsilon + \cos \varkappa)^2}{\sin \varkappa^2 . (\cos \varepsilon + \cos \varkappa)^2}$$

Huius partis numerator expreſſis ſinubus per coſinus fit

$$(1 - \cos \varkappa^2).(1 - \cos \varepsilon^2) + (\cos \varepsilon + \cos \varkappa)^2, \text{ hoc eſt}$$
$$1 - \cos \varepsilon^2 - \cos \varkappa^2 + \cos \varkappa^2 . \cos \varepsilon^2$$
$$+ \cos \varepsilon^2 + \cos \varkappa^2 + 2 . \cos \varepsilon . \cos \varkappa$$
$$= (1 + \cos \varepsilon . \cos \varkappa)^2$$

114. Eſt igitur ſumma quadratorum (111.)

$$= \frac{(1 + \cos \varepsilon . \cos \varkappa)^2}{\sin \varkappa^2 . (\cos \varepsilon + \cos \varkappa)^2} + \frac{\cot \lambda^2}{\sin \varkappa^2}$$
$$= KV^2 \text{ (110)}$$

Vnde patet propoſitum (109.)

115. *Coroll.* Si deſcribatur rete, quilibet duo arcus ſibi proximi meridianorum proiectorum cum quibusuis duobus arcubus ſibi proximis parallelorum proiectorum continent figuram curuilineam quadrilateram, rectangulam.

Sed, ſi in ſphaera ipſa ducantur meridiani et paralleli, inter duo quaeuis paria arcuum meridianorum et parallelorum etiam continetur ſuperficies curua ſphaerica terminata quatuor arcubus ad rectos ſe ſecantibus.

116. Id igitur commune habet rete cum ſuperficie curua ſphaerica, quae proiicitur, quod ſphaericae illae ſuperficies curuae rectangulae in reti repraeſententur ſuperficiebus planis etiam rectangulis, termini ſuperficierum, curuarum et planarum ſint circuli.

117. Porro ex (100.) patet, circa centrum proiectionis, proiectionum ſuperficies proxime eſſe in ratione ſuperficierum proiectarum.

118. Hinc praeſtantia huius methodi proiiciendi intelligitur, quod proxime circa centrum proiectionis ſatis vere exhibeatur et figura et ratio rectangulorum ſphaericorum.

119. Ad ſcalam diſtantiarum per milliaria, cet. menſurandarum haec pertinent: In meridiani rectilinei (42.) parte ea, quae centro proxima eſt, determinetur portio reſpondens arcui dato meridiani per oculum, cuius proiectio eſt rectilineus, v. c. arcui graduum 5. Id autem facile obtinetur, quaerendo v. c. CA, (56.) pro parallelo pro quo ſit $\varkappa - \varepsilon = 2^\circ 30'$; eius enim CA duplum erit proiectio arcus alicuius quinque gradibus aequalis in meridiano per oculum, et quidem horum arcuum eius, in cuius medio eſt W fig. 1.

Patet etiam eſſe illam CA = r. tang ($1^\circ 15'$) vt ſtatim detur dato r.

Iam huius portionis meridiani rectilinei circa centrum, quae respondet 5. gradibus, pars quinta diuidatur in tot partes, quot vnitates distantiarum vsualium gradum efficiunt, puta in 15, si desiderentur milliaria, vulgo *germanica*, quae, cum nullibi distantias itinerarias mensurent in Imperio S. R. G. videantur autem originem suam ducere a Batauis vel nautis, vel geographis, rectius *geographica* dixeris.

Ita parte illa meridiani rectilinei graduum 5. diuisa in partes 75, habentur haec milliaria geographica.

Ita habetur scala, quae ad distantias mensurandas tuto adhiberi potest in locis centro tabulae proximis. (116. 117.)

Quodsi autem tabula extendatur ad regiones a centro suo remotiores, vt si exhibeat partem aliquam ex quatuor, quae dicuntur terrae, aut, quod partem secti orbis aequat, CATHARINAE imperium, non potest eadem scala locis ad marginem tabulae accedentibus adhiberi. Tunc, quae circa centrum fiebant, ita circa extrema imitabimur: Rete descriptum cogitabimus (103). Eius retis quadrilaterum aliquod ad marginem tabulae accedens, remotum erit, non saltim a parallelo illo, qui per centrum tabulae transit, versus boream aut austrum, sed etiam a meridiano rectilineo versus ortum vel occasum. Eius igitur quadrilateri latus vnum ex illis, qui repraesentant arcus meridiani, diuidatur in tot partes, quot milliaria continet arcus, cui respondet, v. c. in 75, si arcus ille respondeat gradibus quinque, milliaria vero desiderentur geographica. Ita habebitur scala, illi quadrilatero apta. Cuius rei ratio ex his intelligitur, quod latera quadrilateri satis exigua sint, vt possint pro rectis haberi, illud autem latus, quod diuidere iubeo, eo in loco arcum circuli maximi repraesentet, mensurae autem distantiarum sint arcus circuli maximi.

Quodsi desideretur distantia locorum duorum, non in idem quadrilaterum cadentium, manifestum est, loco lateris eius, quod diuidere iussi, eligi posse arcum aliquem meridiani inter loca, quorum distantia quaeritur forte medium.

Praxin hanc tradit Hasius in tabula Africae. Scalae ex arcu circa centrum deductae absque sensibili errore locum esse dicit vsque ad gradus 10 a centro (in praefatione ad scriptum, quod tabulae Imperii Russici explicandae adiecit), quod satis bene consentit cum illis, quae docui §. 100.

Prop. X.

Data tabula ad leges proiectionis stereographicae delineata, datoque eius centro; inuenire radium r; ad quem constructa est.

Sol. 120. In meridiano rectilineo (42.) mensuretur distantia paralleli cuiusdam a centro, seu CA (56; 57;). Sit haec distantia = h; dantur vero $\varkappa$, ε; ob datum centrum tabulae, datumque parallelum. Igitur reperitur $r = \frac{h}{\operatorname{tang} \frac{\varkappa - \varepsilon}{2}}$

Intelli-

Intelligitur nullam hic rationem haberi mutationum, quas charta ſubit, vel dum tabulae aereae exprimuntur, vel alias ob cauſſas.

Exemplum.

Haſii tabula Africae eſt proiectio aequatorea cuius centri longitudo eſt 38°.

Pro parallelo cuius latitudo eſt

$20° = R - \varepsilon$, (et hic $\varkappa = R$) reperi $h = 4, 2$ dig. rhenan.

Itaque $\frac{\varkappa - \varepsilon}{2}$ hic $= 10°$; et

a log h = 0, 6232493
ſubduc log tang 10° = 9, 2463188 — 10.
fit log r = 1, 3769305.

Vnde colligitur radius tabulae circiter digitorum 23, 82.

Quodſi ab inuento log r ſubducatur log cof 85° habebitur (106.) logarithmus reſpondens numero 273, 3 digitorum = 11 ped 9, 3 dig, pro diſtantia CV centri proiectionis paralleli, cuius latitudo eſt 5° a centro tabulae, radius autem proiectionis eiusdem paralleli reperitur 156, 6. digitorum paulo maior 13. pedibus.

Scholion de aſtrolabiis.

121. Etſi iam his organis facile careant Aſtronomi, videtur tamen vel ipſa antiqua illorum celebritas effectura, vt pauca de illis hic dicenti veniam daturi ſint lectores; ſed ita quidem cum negotio, in quo hucusque verſatus ſum, connectuntur, vt proiectionis, quam docui, ideam dederint, et antiquiſſima ſint eius exempla. Igitur, cum quid rei ſint aſtrolabia, breuius et melius doceri vix poſſit, quam id docuit *Dechales* in praefatione ad Tractatum ſuum de aſtrolabiis (vide 91.) eo hic vtar.

Eſt igitur aſtrolabium proiectio ſphaerae coeleſtis in planum alicuius circulorum ſuorum, oculo conſtituto, plerumque in polo eius circuli, aliquando in recta per centrum ſphaerae et eius circuli polum quantumlibet producta.

Sit tabula meridianus, oculus in eius polo, hoc eſt, puncto veri ortus aut occaſus, ſphaera collocetur ita, vt ſectio aequatoris et eclipticae incidat in locum oculi, ſicque meridiano congruat colurus ſolſtitiorum. Ita oritur aſtrolabium catholicum *Gemmae Friſii.*

Ioannis de Royas aſtrolabium eſt proiectio orthographica in eundem colurum ſolſtitiorum pro tabula ſumtum, oculo in linea recta per centrum terrae, et interſectionem aequatoris ac horizontis, infinite diſtante. Dicitur etiam *analemma*, inprimis, ſi quibusdam problematibus ſoluendis, eius quaedam partes deſcribantur.

Ptolemaeo tabula eſt: planum aequatoris, in infinitum extenſum, vel, quod eodem redit, planum tropici capricorni. Oculus, in polo auſtrali, ſpectat ſectiones circulorum omnium cum hoc plano.

Parum ab hac hypotheſi differt *Iordanus* tabulae loco adhibens planum, quod ſphaeram tangit in polo boreali (*).

Poſſet quoque oculus collocari in Nadir; et tabulae loco eſſe horizon. Ita parcitur operae deſcribendi, quae ſub horizonte dato perpetuo latent.

Hoc ordine de aſtrolabiis egerunt Dechales et Tacquetus.

Intelligitur ergo, tres illas proiectiones, quas explicaui, pertinere ad totidem aſtrolabia, polarem ad Ptolemaicum, aequatorem ad Gemmae Friſii catholicum, obliquam ad id, cui oculus eſt in Nadir.

Sed falleretur, qui vltimae proiectionis regulas ſufficere crederet, noſtrae obliquae perficiendae. Nam, monente Tacqueto, Opt. Lib. III. Prop. 60. proiectio oculo in Zenith conſtituto (hoc eſt, permutatis hemiſphaeriis, in Nadir) non differt ab illa, qua oculus in polo conſtituitur, ſi nomina circulorum permutentur, et, quod in polari erat aequator, aut horizon, hic fiat horizon aut aequator, ſicque ibi recti et paralleli circuli aequatori, hic ſint recti aut paralleli horizonti, cet. Vnde et hanc proiectionem Tacquetus vberius non explicat.

122. Proiectionum conditiones, ſcriptores hi deducunt ex ſectione, quam *ſub contrariam* vocant coni Scaleni (**), quam circulum eſſe oſtenditur. Eius coni vertex eſt oculus, baſis circulus proiiciendus. Ita primum detecta eſt proprietas, quod oculo in ſuperficie ſphaerae conſtituto, circuli omnes proiiciantur in circulos, qua ſatis iam permoueri potuerunt artifices, ad hanc proiectionem frequentius adhibendam, vel antequam agnoſcerent, quibus rebus praeterea reliquas antecelleret.

123. His quidem ad theoriam mapparum terreſtrium omnia videntur eſſe abſoluta, cum in illis alii circuli proiiciendi non ſint, praeterquam paralleli et meridiani, ecliptica forte excepta, quae ipſa etiam vix alicuius vſus eſt, eam vero liceret deſcribere ſignando diuerſa meridianorum puncta, quae declinationibus punctorum eclipticae reſpondent. Sed, cum oculo, in ſuperficie ſphaerae poſito, circuli cuiusuis proiectio in tabulam, qua vtimur, ſit circulus, ne quid deeſſe videatur, libet, et hoc generatim oſtendere, et eius conſtructionem docere, praemittendum vero eſt

L e m m a

124. Datus ſit (fig. 12.) P S Q angulus $= \varepsilon$; recta V S, quae non eſt in eius plano, cum eius cruribus datos contineat angulos V S P $= \alpha$; V S Q $= \beta$. Quaeritur eius rectae ad planum anguli inclinatio V S W $= \delta$, demiſſa V W in id planum perpendiculari.

125. *Sol.*

(*) V. Ptolemaei Planiſphaerium, Iordani Planiſphaerium, Federici Commandini in Ptol. Planiſph. Commentarius. Venet. 1558. 4. Proiectio Stoflerini (91) eſt Ptolemaica in tropicum capricorni.

(**) Dechales de Aſtrolab. L. III. Prop. 5. conf. Wolf Elem. Matheſ. T. IIII. Geograph. §. 275. vbi rem oſtendit, voce non vtitur.

125. *Sol.* Sumto S pro centro ſphaerae, et captis inde rectis aequalibus, oritur triangulum ſphaericum VQP, cuius dantur latera $VP = \alpha$, $VQ = \beta$, $PZ = \varepsilon$. Iam $VW = VS. \sin \delta$; $WS = VS. \operatorname{cof} \delta$; et ducta VT perpendiculari in SP, vbi et TW eſt ipſi SP perpendicularis (Geom. Prop. 46. cor. 6.) eſt $VT = VS. \sin \alpha$; itaque anguli ſphaerici P, ſinus $= \frac{VW}{VT} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha}$. Docet vero trigonometria ſphaerica computare angulum illum ex lateribus; igitur datur

$$\sin \delta = \sin \alpha. \sin P.$$

126. Formulam, quo ope logarithmorum computatur $\sin \frac{1}{2} P$, hic non addo, cum legatur in omnibus elementis trigonometriae ſphaericae; In meis quidem Prop. 8. Ibidem oſtendi eſſe

$$\operatorname{cof} P = \frac{\operatorname{cof} \beta - \operatorname{cof} \alpha. \operatorname{cof} \varepsilon}{\sin \varepsilon. \sin \alpha}$$

127. Si $\varepsilon = R$; fit $\operatorname{cof} P = \frac{\operatorname{cof} \beta}{\sin \alpha}$. Vnde $\sin \delta = \sqrt{(\sin \alpha^2 - \operatorname{cof} \beta^2)}$ et $\operatorname{cof} \delta = \sqrt{(\operatorname{cof} \alpha^2 + \operatorname{cof} \beta^2)}$

128. Haec ſufficiunt vſui, cui lemma adhibeo. Habet plures alios. Architecti vulgares vix ſibi perſuadebunt, in arte ſua locum eſſe trigonometriae ſphaericae. Sed, ſi cogitentur VSP, VSQ plana eſſe duorum tectorum, ad ſe mutuo inclinatorum, ſuper muris, quorum ſupremi termini horizontales ſunt PS, QS, facile intelligitur opus hic eſſe lemmate ad definiendum ſitum ſectionis tectorum. Idem adhibui in elementis meis Mechan. ſublimioris Sect. 3. §. 218.

Prop. XI.

Circuli alicuius in ſphaera, centrum ſit S. Quaeritur eius circuli proiectio. fig. 13. 14;

Sol. 129. Iuncta CS, plano circuli futura recta, contineat cum WC quidem angulum $WCS = \mu$; ad planum vero meridiani per oculum, in quo ſunt OW, CH; inclinetur angulo $SCf = \theta$; vbi Sf eſt illi meridiano recta. Angulus autem μ eſt diſtantia inter W et polum circuli proiiciendi. Denique, circulus hic proiiciendus, a polo ſuo diſtet arcu φ; erit $CS = \operatorname{cof} \varphi$; radius circuli, $SL = \sin \varphi$, poſito ſphaerae radio $= 1$.

Ita definitur circulus magnitudine inter omnes alios ſphaerae.

Plures autem ſunt circuli eiusdem magnitudinis; vnus quidem centrum habens in hac ipſa recta SC ad alteras centri ſphaerae partes et ad diſtantiam $= CS$ producta; rurſus alii in eadem a centro ſphaerae diſtantia, ſi augeatur angulus WCS fiatque $= 2R - \mu$; item quatuor alii in lineis rectis ad faciem alteram plani meri-

diani per oculum ita positis, vt ad hanc, quo lectori obuertitur, sunt illae duae CS, quas dixi.

Haec eo pertinent, vt intelligantur ambiguitates, quae occurrere possunt in proiiciendo circulo magnitudine dato. Eae vero ex circumstantiis facile diiudicantur.

130. Erunt vero $Sf = \cos\varphi . \sin\theta$; $Cf = \cos\varphi . \cos\theta$

Et, si ponantur

art. 127	α	β	δ
hic	μ	SCt	θ

fiet $\cos\theta^2 = \cos\mu^2 + \cos SCt^2$ Ergo
$\cos SCH = \sqrt{(\cos\theta^2 - \cos\mu^2)}$ item
$\sin SCH = \sqrt{(\sin\theta^2 + \cos\mu^2)}$

131. Vnde demissa St perpendiculari in CH, iunctaque tf quae eidem CH erit perpendicularis; est

$$St = \cos\varphi . \sqrt{(\sin\theta^2 + \cos\mu^2)}$$
$$Ct = \cos\varphi . \sqrt{(\cos\theta^2 - \cos\mu^2)}$$
et $\sqrt{(St^2 - Sf^2)}$ seu
$$ft = \cos\varphi . \cos\mu$$

132. Igitur pro puncto S; in lemmatum huic theoriae praemissorum primo

ipsis	α	δ	n	a	d
respondent	Sf	ft	Ct	o	1

Vnde datur, si opus est, centri S proiectio.

133. Ex L, circuli proiiciendi puncto quolibet in planum meridiani per oculum cadat LM ei plano recta, et ex M in CT perpendicularis MN.

134. Ergo $tN = Ct - CN =$ perpendiculo ex f in MN demisso. Inter hoc vero perpendiculum, et tn cadit rectae MN pars $= ft$; igitur, eiusdem rectae residuum inde ab hoc perpendiculo vsque ad M, est $= MN - ft$.

Rectae vero ab M ad f ductae quadratum continet quadrata illorum, quae dixi, perpendiculi et residui, seu est.

$$Mf^2 = (Ct - CN)^2 + (MN - ft)^2$$

135. Cum sint LM, Sf, rectae eidem plano meridiani per oculum, sunt hae rectae parallelae, et LSfm est planum (Geom. Pr. 46.) in quo erit, acta per S ipsi Mf parallela; inter hanc parallelam, et L punctum intercipietur in ML recta, longitudo $= ML - Sf$, huius autem longitudinis quadratum additum quadrato parallelae quam dixi, hoc est rectae Mf, efficiet quadratum rectae LS, seu erit

LS^2

$LS^2 = (LM - Sf)^2 + Mf^2$ hoc est (129; 133.)
$\sin\varphi^2 = (LM - Sf)^2 + (\epsilon t - CN)^2 + (MN - ft)^2$
vbi pro circulo dato, sunt Sf, Ct, ft,
constantes, datae.

136. Formando quadrata est
$\sin\varphi^2 = LM^2 - 2\,LM.\,Sf + Sf^2$
$+ MN^2 - 2.MN.\,ft + ft^2$
$+ CN^2 - 2.CN.\,Ct + Ct^2$

137. Cum vero sit $CN^2 + MN^2 = CM^2$
et $CM^2 + ML^2 = CL^2 =$ quadrato radii sphaerae in cuius superficie est L; erit
$LM^2 + MN^2 + CN^2 = 1$.

138. Rursus est $Sf^2 + ft^2 = St^2$ et
$St^2 + Ct^2 = CS^2 = \cos\varphi$

139. Ergo aequatio (136.) abit in
$\sin\varphi^2 = 1 - 2.\,LM.\,Sf + \cos\varphi^2$
$- 2.\,MN.\,ft$
$- 2.\,CN.\,Ct$

140. Hoc est in
$LM.\,Sf + MN.\,ft + CN.\,Ct = \cos\varphi^2$

141. In lemmate primo sunt

	n	δ	α	d	a
hic	CN	MN	LM	1	o

quodsi ergo x, y, dicantur, vt (21.) est ex lemm. I. eiusque Cor. 3.

$$y = \frac{CN}{1 + MN}\,;\quad x = \frac{LM}{1 + MN}$$

142. Vt igitur ex 140; obtineatur aequatio inter x et y haec facienda sunt:

Dantur tres aequationes
I. $CN^2 + NM^2 + ML^2 = 1$
II. $y.\,(1 + MN) = CN$
III. $x.\,(1 + MN) = LM.$

Ex his tribus aequationibus quantitatum LM, MN, NC, eliminentur duae, et reperiatur tertia per x, y; Ita dantur omnes et singulae per x, y, et adeo eorum valoribus in (140.) substitutis, datur aequatio inter x; y;

142. Ergo ex aequationibus II; III; abit I in
$(y^2 + x^2).\,(1 + MN)^2 + MN^2 = 1.$

vnde

vnde eruitur

$$MN^2 = \frac{-2.(y^2+x^2).MN + 1 - (y^2+x^2)}{1+y^2+x^2}$$

et

$$MN = \frac{-(y^2+x^2) \pm \sqrt{((y^2+x^2)^2 + (1+y^2+x^2).(1-(y^2+x^2))}}{1+y^2+x^2}$$

Quantitas sub signo radicali fit 1;

Igitur $MN = \frac{-(y^2+x^2) \pm 1}{1+y^2+x^2}$

143. In hoc duplici valore, adhibendo -1; fit ipsa $MN = -1$; et aequatio I; abit in $CN^2 + 1 + ML^2 = 1$; vbi non possunt esse CN, ML simul possibiles, nisi sit vtraque $= o$.

Ergo $CN = o = ML$.

Cum MN, quae in figura et calculo, hucusque instituto, positiua sumebatur, cadat ad rectae CH partes eas, ad quas cadit W; consequens est, vt negatiua cadat ad oppositas.

Praeterea, quoniam hic $CN = o$; coeunt N et C; adeoque $NM = -1$, indicat, ipsi CH excitari debere in plano meridiani per oculum perpendicularem per C; vergentem respectu CH ad eas partes, ad quas situs est oculus, et aequalem radio sphaerae. Haec itaque perpendicularis terminatur in oculo ipso.

Igitur M cadit in O, et in idem punctum cadit L propter $LM = o$.

Cum igitur L significet quoduis circuli proiiciendi punctum, totus hic circulus coit in punctum O, ibique est etiam eius centrum S, item eius polus, vt haec omnia, quae ad illum circulum pertinent, in vnicum punctum O coeant.

Ergo pro hoc circulo, in punctum contracto, est $\varphi = o$; $\cos \varphi = 1$.

Rectarum (130) computatarum nullae infinitae fiunt, dantur enim per sinus et producta ex sinibus, nulla est quotiens, cuius diuisor sit sinus; sinus autem nulli fiunt infiniti.

Itaque quantorum in aequ. (140.) obuenientium nullum est infinitum. Haec igitur aequatio casu praesenti fit MN. $st = \cos \varphi^2$ hoc est $-1.1.\cos \mu = 1$; vnde $\mu = 2R$ vt decet, cum recta CS iam cadat super CO.

Perpendicularis ex S in CH; seu St, hoc casu fit $= 1$; Ergo $\theta = o$

Ita intelligitur valorem $MN = -1$ circuli proiiciendi loco dare oculum. Oportet autem, vt, quod proiici debet, extra oculum situm sit.

144. Adhibeatur ergo $MN = \frac{1-y^2-x^2}{1+y^2+x^2}$, qui valor positiuus est, quamdiu $y^2 + x^2$ minor est, quam 1. Intelligitur autem, id obtinere, quamdiu L ponitur post tabulam respectu oculi.

145. Igitur

145. Igitur iam fit

$$1 + MN = \frac{2}{1 + y^2 + x^2}$$; vnde ex aequationibus II, III, 142. habentur CN, LM; illorumque valoribus ſubſtitutis, aequatro 140; abit in

$$\frac{2x.\ Sf + (1 - y^2 - x^2).\ ft + 2y.\ Ct}{1 + y^2 + x^2} = cof\,\varphi$$

vnde

$$2x.\ Sf + \begin{matrix} ft \\ -cof\,\varphi^2 \end{matrix} - \begin{matrix} ft \\ -cof\,\varphi^2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} y^2 - ft \\ -cof\,\varphi^2 \end{matrix} \right\} x^2 + 2y.\ Ct = 0$$

hoc eſt

$$x^2 + y^2 - \frac{2.\ Sf}{cof\,\varphi^2 + ft}.\ x - \frac{2.\ Ct}{cof\,\varphi^2 + ft}.\ y + \frac{ft - cof\,\varphi^2}{cof\,\varphi^2 + ft} = 0$$

hoc eſt ex 130; 131.

$$x^2 + y^2 - \frac{2.\ \sin\theta.\ x}{cof\,\varphi + cof\,\mu} - \frac{2\sqrt{(cof\,\theta^2 - cof\,\mu^2)}.\ y}{cof\,\varphi + cof\,\mu} + \frac{cof\,\mu - cof\,\varphi}{cof\,\varphi + cof\,\mu} = 0$$

146. Haec igitur aequatio ex lemmate II. colligitur eſſe ad circulum. Sunt vero

lemmatis hic	$\alpha\, r$	$\beta\, r$	$\gamma\, r^2$
	$\frac{-2.\ \sin\theta}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$	$\frac{-2\sqrt{(cof\,\theta^2 - cof\,\mu^2)}}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$	$+\frac{cof\,\mu - cof\,\varphi}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$

Vnde habetur ex lemmate citato radius proiectionis $= \frac{\sin\varphi}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$

$$CG = \frac{\sqrt{(cof\,\theta^2 - cof\,\mu^2)}}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$$

$$GK = \frac{+\sin\theta}{cof\,\varphi + cof\,\mu}$$

147. Sed vſui aptius erit, haec ita exprimere, vt ſtatim applicari poſſint circulo proiiciendo, cuius planum ſecat planum meridiani per oculum in data recta, datoque ad illud angulo inclinatur.

148 Occurrat igitur circuli proiiciendi planum plano meridiani per oculum in recta FK; fig. 15. cuius punctum F quidem eſt in CW; K vero in Cſ, ſi opus eſt, producta.

149. Iun-

149. Iunctis SK; SF; eſt itaque SKF planum circuli proiiciendi, cui, cum recta ſit CS; erunt CSK; CSF, recti; ipſum vero CSK planum continet CS rectam plano circuli proiiciendi, Sſ rectam plano meridiani per oculum, igitur horum planorum vtrique rectum eſt; ergo et illorum interſectioni FK; Ergo CKF, SKF, recti ſunt, et SKC eſt inclinatio plani circuli proiiciendi ad planum meridiani per oculum.

150. Haec inclinatio, ſi dicatur δ; eſt $\delta = R - \theta$ (129).

151. Iam $CK = \frac{CS}{\cos\theta} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$ ob CSK rectum,

$CF = \frac{CS}{\cos\mu} = \frac{\cos\varphi}{\cos\mu}$ ob CSF rectum.

Ergo $\frac{CK}{CF}$, ſeu $\sin CFK = \frac{\cos\mu}{\cos\theta}$

152. Igitur dicto angulo, quem ſectio plani circuli proiiciendi et plani meridiani per oculum, continet cum CW, hoc eſt angulo $CFK = \zeta$, eſt $\sin\zeta = \frac{\cos\mu}{\cos\theta}$.

Porro, eſt CF quam dicam $b = \frac{\cos\varphi}{\cos\mu}$ vnde

$$\sin\zeta = \frac{\cos\varphi}{b.\cos\theta}.$$

153. Quantitates ergo, quae (129) pro datis ſumebantur, ita iam exprimuntur per datas b, ζ, δ $\theta = R - \delta$;

$b.\cos\theta.\sin\zeta$; ſeu $\cos\varphi = b.\sin\delta.\sin\zeta$;

$\frac{\cos\varphi}{b}$ ſeu $\cos\mu = \sin\delta.\sin\zeta$

154. Ita ex 146. fit radius proiectionis $= \frac{\sqrt{(1 - b.^2 \sin\delta.^2 \sin\zeta^2)}}{(b+1).\sin\delta.\sin\zeta}$

et in figura Lemm. II.

$\frac{CG = \sqrt{(\sin\delta.^2 (1 - \sin\zeta^2))}}{(b+1).\sin\delta.\sin\zeta}$ ſeu $CG = \frac{\cot\zeta}{b+1}$

$GK = \frac{\cos\delta}{(b+1).\sin\delta.\sin\zeta}$ ſeu

$GK = \frac{\cot\delta}{(b+1)\sin\zeta}$

155. Pro

155. Pro *circulo quouis maximo.*

Cum omnes circuli maximi ſecent ſe in centro ſphaerae, eſt $b = o$ et

radius proiectionis $= \frac{1}{\text{ſin } \delta . \text{ ſin } \zeta} = \frac{1}{\text{coſ } \mu} = \text{ſec } \mu$

$CG = \cot \zeta$

$GK = \frac{\cot \delta}{\text{ſin } \zeta}$ vel ex (146) hic $GK = \frac{\text{ſin } \theta}{\text{coſ } \mu} = \text{ſin } \theta . \text{ ſec } \mu$

Cum tabula fig. 1. ſit circulus maximus, omnes autem circuli maximi in ſphaera ſe biſſecent, ſecatur tabulae perimeter a quouis circulo maximo, et harum interſectionum proiectiones coincidunt cum ipſis interſectionibus, diſtant vero inter ſe ſphaerae diametro, omnino vt puncta D, d, fig. 1. (39.) Igitur dimidium cuiusuis circuli maximi proiicitur in arcum, cuius chorda eſt diameter quaedam tabulae. Vnde ſi conſtet, qualis ſit haec tabulae diameter, deturque praeterea centrum proiectionis, circuli maximi, datur ex his radius proiectionis etiam non adhibendo formulam, hic pro illo repertam.

156. Pro *circulo, qui rectus ſit meridiano per oculum.*

$\delta = R$ igitur

radius proiectionis $= \frac{\sqrt{(1 - b^2 . \text{ ſin } \zeta^2)}}{(b + 1) . \text{ ſin } \zeta}$

$CG = \frac{\cot \zeta}{b + 1}$ $GK = o$

157. Pro meridiano quouis eſt

hic	δ	ζ
Prop. II.	λ	$\varkappa$

Vnde formulae 155; abeunt in eas (41). Ad ſignum negatiuum hic non attendo, cum quid ab eo indicetur, conſtet (79).

158. Parallelus aequatori, rectus eſt meridiano per oculum, ſecat vero illum in recta perpendiculari ad axem ſphaerae per F fig. 1. Haec itaque ſectio, cum recta CW continet angulum $R - \varkappa$; in Prop. III. ſunt ergo

hic		ζ	b
Prop. III.		$R - \varkappa$	$\frac{\text{coſ } \varepsilon}{\text{coſ } \varkappa}$

Vnde ex 156; habetur

radius proiectionis $= \sqrt{\frac{(1 - \text{coſ } \varepsilon^2)}{\text{coſ } \varepsilon + \text{coſ } \varkappa}}$

$$CG = \frac{\text{tang } \varkappa . \text{ cof } \varkappa}{\text{cof } \varepsilon + \text{cof } \varkappa}$$

formulae in (53.) repertae.

159. Exemplum ad 155.

In proiectione aequatorea (106) exhibenda fit *ecliptica;* Ponatur vero fitus ſphaerae proiiciendae talis, vt diameter eclipticae per puncta aequinoctialia, recta ſit meridiano per oculum, adeoque in plano tabulae ſit ipſi T H perpendicularis per C. Ita puncta aequinoctialia collocantur in polis meridiani per oculum, vnde conſequens eſt, vt hic meridianus ſecet eclipticam in diametro per puncta ſolſtitialia. Haec itaque diameter ad C W inclinabitur angulo, qui metitur obliquitatem eclipticae, $23^{\circ}\ 29' = \zeta$, eritque proecliptica ita conſtituta, circulo maximo, qui rectus eſt meridiano per oculum $\delta = R$; vnde radius proiectionis $= \frac{1}{\text{ſin } \zeta} = \text{coſec } \zeta = 2,5095218.$

$$CG = \cot \zeta = 2,\ 3016732$$
$$GK = 0$$

Eadem habentur ex 156; ponendo $b = 0$.

Ita in fig. 9. deſcripta eſt ecliptica ex centro E.

Exemplum 2.

Sit proiiciendus horizon loci dati.

160. Sit fig. 12. V locus ille in ſphaera, cuius centrum S; ſit Q ſphaerae polus, item qui Q fig. 1. P vero ſit punctum quod eſt W fig. 1. vt Q S P ſit meridianus per oculum, et ſibi reſpondeant

fig. 1	Q	W	C	L
12	Q	P	S	V

Huius igitur loci in fig. 12; datur diſtantia a polo Q V; complementum eius latitudinis geographicae; item angulus quem meridianus eius cum meridiano per oculum continet, adeoque angulus ſphaericus P Q V; tandem arcus P Q, reſpondens ipſi W Q fig. 1. Haec data ita reſpondent litteris Prop. I.

fig. 12	Q V	P Q V	P Q
Prop. 1	ε	λ	$\varkappa$

Igitur in triangulo ſphaerico Q V P computatur latus V P; quod metitur angulum V S P; fig. 12. qui cum reſpondeat angulo S C W fig. 13. erit in fig. 12; $V S P = \mu$ (129).

In eodem triangulo ſphaerico fig. 12; computatur etiam angulus Q P V, quem dicam P; et dicta V S = 1; eſt V T = ſin μ; V W = ſin μ. ſin P.

Eſt vero V W ſinus anguli V S W, quo recta S V inclinatur ad planum meridiani per oculum, Igitur hic angulus reſpondet ipſi θ (129) vnde ſin θ = ſin μ. ſin P.

161. Ho-

161. Horizon loci V, fig. 12; eſt circulus maximus, rectus ipſi VS; Is itaque ad meridianum per oculum inclinatur angulo R — θ qui eſt δ (150).

Datur etiam ex (159) $\text{ſin } \zeta = \frac{\text{coſ } \mu}{\text{ſin } \delta}$

162. Ita ex dato ſitu loci V in ſuperficie telluris, computantur quibus opus eſt ad eius horizontem proiiciendum (155).

163. Si cadat V fig. 12. in ipſum meridianum per oculum, eſt $\theta = 0$; $\delta = R$; et $PSV = \pm VQ \mp PQ$ prouti V cadit inter P et Q, vel extra haec puncta. Igitur in ſignis (160) $\mu = \pm \varepsilon \mp \varkappa$; Ita datur ex (155) radius proiectionis = ſec μ, $CG = \text{tang } \mu$ (cum hic in 153; ſit coſ $\mu = \text{ſin } \zeta$) et $GK = 0$

164. In proiectione polari, oculus eſt in omnibus meridianis ſimul; ergo tunc ſemper locum habet (163) vbicunque ſit V; et propter $\varkappa = 0$; eſt $\mu = \varepsilon$.

165. Proiectione horizontis vtuntur, tum in planiſphaeriis terreſtribus, tum in aſtrolabiis, qui docent, his inſtrumentis problemata ſoluere, ad quae iam globus plerumque adhibetur. Planiſphaeria duo coeleſtia ad leges proiectionis polaris edidit Dom. de Vaugondi (*), quorum explicationi adiecit radiorum horizontis pro diuerſis latitudinibus tabulam, quae ex formulis, quas exhibui poteſt computari, vſusque eius ex dictis intelligi. Neque opus habet hac tabula, qui praxin ſolam quaerit, dummodo ſciat (163) centrum proiectionis horizontis eſſe in TH (fig. 8.) et a C puncto diſtare cotangente latitudinis. Tunc enim intelligitur, ducta per C diametro tabulae ipſi TH perpendiculari, per eius diametri extrema tranſituram proiectionis horizontis.

166. In tota hac diſſertatione pro tabula ſumſi, planum circuli maximi quod tranſit per centrum ſphaerae. Quaeri autem poteſt proiectio, reliquis manentibus iisdem, tabula ſaltim per centrum non tranſeunte, vt ſit planum circuli minoris, aut forte tangens ſphaeram, imo, ſi libet extra ſphaeram poſitum. Tale quid contingit in aſtrolabiis Ptolemaei et Iordani (121).

I. Sit igitur oculus alicubi in ſuperficiei ſphaerae; ad eum ducti cogitentur radii lucis a peripheria circuli alicuius in ſphaera; Ita habetur conus cuius vertex eſt oculus, baſis circulus in ſphaera.

II. Ille conus ſecetur plano quolibet, ſiue intra ſphaeram ſiue extra eam; Sectio coni hoc plano facta, erit circuli ſphaerae in planum illud proiectio.

 III. Plano

(*) Vranographie, ou deſcription du Ciel en deux hemiſphéres, calculés et conſtruits pour l'année 1763. par Mr. Robert de Vaugondy Geogr. ord. du Roy. Par. 1764. Libellus hic, qui rationem inſtituti, et Aſteriſmorum notitiam exhibet, eſt in forma, quam quartam dicunt Planiſphaeria ipſa praegrandia ſunt. Picturas, quibus ſaepius obteguntur ſtellae, recte omiſit. Quod non adeo inſolens eſt, ac id iudicauit. Habentur iam aſteriſmi absque picturis in Picolomenii Sphaera (La Sfera del Mondo di Mr. Aleſſandro Picolomini, In Venegia 1573.) item in planiſphaeriis, quae conſtituunt duas tabulas vltimas Vranometriae Bayeri,

III. Plano illi parallelum ducatur per centrum ſphaerae ; Id etiam ſecat conum, et ſectio haec eſt proiectio circuli ſphaerae in illud planum. Ea vero ſemper eſt circulus. (146).

IIII. Igitur, ſumto oculo pro vertice deſcribitur conus idem, ſiue tranſiens per hunc verticem recta infinita, conice moueatur per perimetrum circuli in ſphaera, ſiue per perimetrum proiectionis eius in tabulam per centrum ſphaerae ductam.

V. Si vero conſideretur is conus, quatenus vltimo modo deſcriptus eſt, intelligitur eius ſectionem quamuis, factam plano parallelo tabulae per centrum ſphaerae, eſſe circulum.

VI. Talis autem ſectio, eſt proiectio circuli ſphaerae, in planum quod per centrum non tranſit (II).

VII. Itaque, oculo in ſuperficie ſphaerae poſito, circulos ſphaerae quiuis, in planum quoduis, proiicitur in circulum.

VIII. Eius proiectionis, in tabulam per centrum non tranſeuntem, conſtructio facile habetur, ſi conſideretur proiectio in tabulam per centrum tranſeuntem, cum hae duae proiectiones ſint ſectiones circulares parallelae eiusdem coni.

XIII.

De Lege Continui in natura.

Quod tangit, idem eſt, tamen vltima diſtant.
Ovidius Metamorph. VI. 67.

§. 1.

An continui lex *penitus noua ſit?*

Continui, quam vocant, legem, etſi adeo nouam non iudicem, vt trito illo axiomate: *Naturam non facere ſaltum*, contineri eamdem arbitrer; viſus tamen mihi ſum, pluribus, iisque paululum diuerſis ſenſibus, huic axiomati tributis, in alia ſignificatione, euidentiam eius agnoſcere, in alia minorem percipere lucem. Quae mihi hac de re meditanti ſe obtulerunt, proferam, ſatis conſcius, quam difficile negotium ſuſceperim, quippe quem ipſum *continui* nomen, monere poterat, in labyrinthum philoſophorum me ingredi: (*) Sed id ſtudebo, vt probem lectoribus, ſi non inſigne, verum diiudicandi acumen, certe ſentiendi modeſtiam.

§. 2. Me-

(*) Ita Libertus Fromondus, libro cuidam ſuo titulum fecit: *Labyrinthus; ſiue de compoſitione continui.* Antu. 1631.

§. 2. Memorat LEIBNITIVS variis in locis, *continuitatis*, quam vocat, *legem*, qua *in continuis extremum exclusiuum tractari possit vt inclusiuum*, vt rem in epistola ad suum in philosophia *successorem* (*) expressit, vt *figura philosophico rhetorica quasi*, *punctum sit linea euanescens*; Eamque inter paucos illos, qui digni scripserunt, LEIBNITII WOLFFIIQUE defensores, dignissimus BILFINGERUS ad ipsas animae actiones transfert (**). Est vero haec lex nihil aliud, quam physicae applicatum mathematicorum axioma: quaecunque ex finitae alicuius et realis quantitatis conditionibus deducta sunt ea adhuc mutatis mutandis valere; si euanescere haec quantitas ponatur. Sed cautione hic opûs esse, inde constat, quod possint in ratiociniis talia supponi, quae euanescente illa quantitate locum non amplius habent. Exemplum exhibet summus geometra EULERUS, (†) et plura huc spectantia olim collegi (††). IO. BER-

Quid per eam aliquando Leibnitius intellexerit?

An lex continuitatis hoc sensu accepta tuto semper possit adhiberi?

(*) Act. Erud. Suppl. Tom. V. S. VI. pag. 267. explicat Leibnitius ex ea Guidonis Grandi paradoxon, quo adseritur ex infinitis nullionibus repetitis binarium existere. Vt de hoc paradoxo mentem meam obiter exponam, videtur illud totum ex non recto intellecto seriérum infinitarum vsu natum. Series enim infinita omnis, monente Colsono in Comm. on Newtons Meth. of Fluxions pag. 152. *Supplementum* postulat, quod ad terminos seriei inuentae additum, completum quantitatis valorem exhibeat. Id supplementum in conuergentibus seriebus augescente terminorum numero decrescit, vt data quauis quantitate minus fiat, in diuergentibus crescit. Iam, si diuisione obtineatur series $1 : (1 + x) = 1 - x + x \cdots + x^{2n} - x^{2n+1}$, vt completus sit seriei valor, addi oportet supplementum $+ x^{2n+2} : (1 + x)$, vel si series saltim ad Terminum exponentis $2n$, esset continuata, supplementum esset $- x^{2n+1} : (1 + x)$. Posito ergo $x = 1$ et adhibito supplemento, fit series casu I. $1 - 1 + 1 \cdots + 1 - 1$ cui accedit supplementum $+ \frac{1}{2}$ vt tota series sit $0 + 0 \cdots + 0 + \frac{1}{2}$ casu II est $1 - 1 + 1 \cdots + 1$ et addendo supplementum $- \frac{1}{2}$ rursus fit $0 + 0 - - - + \frac{1}{2}$. Huius ergo supplementi consideratio mirabile omne, quod Grandus reperat, tollit. Nam quoque posito $n = \infty$ semper supplementum est $\frac{1}{2}$ et mirabile Grandi huc redit esse $0 + 0 + 0 \cdots + \frac{1}{2}$, vel $0 + 0 + 0 \ldots + 1 - \frac{1}{2}$. vtramque $= \frac{1}{2}$. Et ex eodem supplemento explicari poterit, cur v. g. $\sqrt{(1 - x)} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ *cet:* Posito $x > 1$ videatur exhibere quantitatem impossibilem per seriem mere possibilium. Non infiniti vis ea est, quae creare Grando visa, hic ex possibilibus impossibile efficiat, sed cogitari oportet, quantumcunque series producatur, nunquam accurate radicem haberi, nisi supplemento addito, quod hoc casu impossibile fiet. Sed haec quidem de Grandi paradoxo, venia dixerim nuperrimi vitae illius scriptoris, vt ex recentis *diarii eruditorum Italiae* gallici Tom. II. pag. 551. didici, hac in re a Grando dissentientis: Semi eruditos vocantis, qui ea, quae captum suum superent, deliriorum philosophicorum loco habeant. Vtique fateor eaptum meum superat, infinitum ex nihilo creans, sed non superat, quod ex Euclide, Archimede, Newtono atque Leibnitio, Hausenius me docuit, infinitum pro potentia quantitatis perpetuo crescendi vel decrescendi sumtum.

(**) Diluc. philos. §. 299.

(†) Mech. Tom. I. §. 313.

(††) In progr. inaug. de cautione in neglectu quantitatum infinite paruar, obseruanda Lipf. 1746.

Io. BERNOULLIUS dubitat an in theoria compoſitionis virium condenda, motus naſcentes recte conſiderentur, cum nulli tamen naſcantur (*). GALILAEUS vero dum, quae de ſuperficiei annularis et circuli alicuius aequalitate demonſtrat, ad eum caſum transfert, quo annulus in lineam circularem, et circuli radius in punctum abit, indeque infert centrum peripheriae eſſe aequale, omnibus certe vel iocari viſus eſt, vel paralogiſmum committere (**). Vt pateat non tuto ſemper quietem tanquam motum euaneſcentem, punctum vero tanquam lineam euaneſcentem conſiderari.

Senſus quo accepta lex continui certa eſt.

§. 3. *Sed* haec tamen ſine vllo erroris metu ſumere licebit: Corpus motum ab vno motus ſui termino ad alterum per omnia loca, in via, quam ſequitur, inter media, tranſire, punctum curuam deſcribens, nec ſubito aſſignabiliter a tramite ſuo deflectere, nec per determinabile ſpatium recta progredi, radium lucis non in puncto frangi vel reflecti, ſed incuruari, donec vltimo in directione tangentis exiguae illius curuae in quam inflexus eſt, progrediatur (***), imo, ne contra *legem continui* peccetur, curua ſubito deſinente, punctis quaſi coniugatis illam vtcunque continuari (****), et ſexcenta alia, quae vnico hoc enunciato continentur, *quae in natura fiunt mutationes, eas omnes ſenſim ſenſimque contingere.* Non nego tam euidentia, tamque innumera exempla huius aſſerti, oculis perpetuo obiici, vt vel ipſe mutatorum in nouas formas corporum ſcriptor, ne ſibi opponatur:

Quodcunque oſtendis mihi ſic, incredulus odi,

non ictu oculi Daphnen in laurum, vel Nioben in marmor commutet, ſed illam *arboreſcentem*, hanc *lapideſcentem* ſpectandam quaſi exhibeat. In ipſo rerum creatarum ordine obſeruare id licet, fluctuantibus terminis *claſſes*, *regna* ipſa, cohaerere magis, quam ſeparari, quod data opera oſtendit VALISNIERIUS (†). Plantas certe cum animalibus polypi coniungunt, foſſilium cum plantis obſcurius eſt vinculum, cum vegetantes petras cum TOURNEFORTIO (††) non multi ſtatuant, et lithophyta, olim in vegetabilis et mineralis regni confinio poſita, loco mouerit, et ad arte animalium facta retulerit PEYSSONELII et IUSSIEUI obſeruatio (†††). In ſingulis autem regnis *continui* huius exempla quamplurima habentur; ſi ſpecie externa lapides diſcri-

Eius ex naturali hiſtoria illuſtratio.

(*) Opp. Tom. IV. n. 177. §. 5.

(**) Solutionem paradoxi Galilaeani dare conatus eſt Stedlerus in Act. Erudit. Franconicis X Sammlung 7. Art.

(***) Newton. Princip. Lib. I. Sect. XIV.

(****) Euleri Introd. in analys. infin. art. 517. 518.

(†) Lezzioni Acad. intorno all' ordine della progreſſione et della conneſſione che hanno in ſieme tutte le coſe create. v. ej. Iſtoria della generaz. dell Uomo e degli animali Part III. cap. 4.

(††) Voy du Lev. Lettre II. p. 179. et Lettre V. p. 228. ed. de Lyon 1717. 8. conf. Comm. Acad. Scient. Par. ad annum 1702.

(†††) Examen de quelques productions marines par Mr. Bern. de Iuſſieu. Memoir de l' Acad. 1742. v. tamen Mem. ſur l'hiſtoire des pierres precieus par Mr. le Chev. de Baillon, in *Actis Societatis Columberiae Florentinae.*

diſcrimines, vltima *ſpati* forma in *fluorem (flußſpat)* abit, ſi igne illos examines, inter eos, qui in vitrum liqueſcunt, et qui pertinaciter igni reſiſtunt, intermedii quidem ſunt (*) herbas cum arboribus ſuffrutices et frutices coniungunt; cuius continuitatis exempla plurima methodus vegetabilium naturalis ſuppeditat (**); hominem exterior facies, (et quantula pars plerorumque hominum exiſtit mens!) vel LINNAEO (***) fatente, vix a ſimia diſtinguit.

§. 4. Itaque, ſi *ſenſim paulatimque* fieri omnes in natura mutationes, id ſignificat: quod mutatur, per omnes eos ſtatus tranſire debet, vt ad vltimum perueniat, non ſubito ex cibis ventriculo ingeſtis oſſa carnesque fieri, ſed ad chylum prius ex illis educi, deinde ſanguini commiſceri, denique nutriendis corporis partibus adſimilari, atque apponi; non ſtatim ex ouulo egreſſam erucam per auras ferri, ſed prius laruatum papilionem repere, poſt chryſalidem ex erucae pelle prodire, tandem rupto ſepulcro euolare, nihil omnino eſt, quod contradici poſſit, vt potius, qui hoc ſenſu ſaltus a natura committi, qui v. g. cum *Blancardo* inſecta in corpore humano incluſa, mutationes, quas in aero libero ſubitura erant, non pati, et tamen genus propagare (****) ſtatuerit, vel nullum omnino ab *auctore ſapientiſſimo* profectum ordinem, vel perpetuis eum turbatum miraculis ſit defenſurus. (†)

Fluit ex ordine in vniuerſo a creatore ſtatuto.

§. 5. Igitur, quod mutatur, per plures ſtatus tranſit, donec ad vltimum perueniat. Sed ſtatuum horum numerus, an certus eſt atque definitus? vt priorem quemlibet ſtatum, alius adſignabili diſcrimine ab eodem ſeparatus ſequatur, *an* hic omnia fluunt? et proximus quiuis differentia, quauis data minore a priore diſtat? hoc eſt, vt recepto iam ſermone vtar, an *finitis* differentiis, an contra *infinite paruis* mutationes progrediuntur? Sunt ſummi viri, quibus vltimum placet, qui, vt extenſionem in geometria, ita hic ſtatus mutationem, in elementa infinite parua reſoluunt, idque *continui lege* iuberi contendunt. Vt rem exemplo dilucidem, corporis moti velocitatem ab alius corporis impetu non ſubito mutari in eam, quae ex regulis conflictus vltimo prodit, ſed durare conflictum per tempuſculum aliquod, hocque fluente, infinite paruis augmentis continuo creſcere alterius corporis velocitatem, alterius decreſcere, adfirmant. Id ſi probauerint inſignia inde conſequuntur. Nam nec corpora perfecte dura amplius dantur, nec magnus hinc faciendus eſt gradus, vt ad infinitam diuiſibilitatem materiae perueniatur, profecto enim vel haec concedenda eſt, poſito motum ſubito perire non poſſe, vel dandum R. P. BOSCOVICH nullum omnino motum impulſus ope communicari, ſed antequam corpora ſe contingant, viribus

Num mutationes omnes gradibus infinite paruis fiant.

(*) Cramer Elem. art. docim. P. I. §. 47.
(**) Vid. Haller in enumerat. ſtirp. Heluet. paſſim.
(***) Praef. ad Faunam Suecicam.
(****) Valliſnieri della generaz. de Vermi nel corpo vmano pag. 6. ſeq. Patau. 1710.
(†) Conf. Mulleri diſp. de ſaltu naturae Lipſ. 1699. habita.

viribus attractiuis et repulſiuis illorum in ſe mutuo actiones abſolui (*). Ego quidem, id mihi non arrogo, vt, ſitne hoc ſenſu accepta *lex continui*, toti rerum naturae lata, nec ne, arbitrum me conſtituam, ſed quando contradicere aeque magnos viros cerno, quae dubia hac in re mihi videntur, vt *docear*, non vt *decidam*, iure meo exponere me poſſe, ſpero.

§. 6. Primo remouendum exiſtimo *infiniti* ex hac controuerſia vocabulum: Non abhorreo vocabulum, ſed pro tali habeo, quo breuitatis cauſa, aliud quidpiam verius, et rigori geometrico conuenientius indigitetur. In illo errore, ſi error eſt, ſcio me, cum duobus illis, in quibus vis humani ingenii enituit, viris verſari, quorum ab altero *Britanni*, ab altero *non Britanni* infiniti calculum acceperunt. Qui, recentiorum inuenta quomodo antiquorum traditis nitantur, poſt ARCHIMEDES, quomodo exiſtere potuerint, NEWTONI, LEIBNITII, BERNOULLII atque EULERI norunt, iis ſatis conſtat, *infinite parua* pro veterum quantitatibus *quauis data minoribus* compendii gratia adhiberi (**), vt infiniti calculum dilucide et rigoroſe demonſtrando, oſtendit COLIN. MACLAURIN in immortali *de fluxionibus* libro, quod, ſi imitari peſſimae famae ſcripti indicem, in tam egregio opere nominando fas eſſet, recte *infinity not myſterious* vocares. Gradibus igitur infinite paruis naturam in mutationibus, quas patitur, progredi, id, niſi fallor, idem eſt, ac ſi diceretur: *inter quemlibet ſtatum, et, qui eum ſequitur, intermedium aliquem exiſtere, nullos tam propinquos fingi poſſe, qui non interiecto aliquo adhuc diſcriminentur.* Corporis cuiusdam velocitas *a* creſcendo mutetur in α; ad quam magnitudinem, antequam pertingit, ponit lex continui per infinitas intermedias eam tranſiiſſe, ita quidem, vt ſi poſt *a* ſequatur primo *u*, deinde *v*, poſſint hae duae vtcunque propinquae ſibi fingi; ſeu ſequens velocitas a praecedente incremento, quantumcunque libet, exiguo differre, quod quidem ita enunciant fieri, *v* ex *u* accedente ad *u*, ipſius *u* differentiali, ſeu eſſe $v = u + du$, ſicque poni poſſe v ipſi u omni quantumuis propinqua quantitate adhuc propinquius.

Res exemplo illuſtratur.

§. 7. Iam fateor, obſcurius adhuc adſerti §. 6. veritatem a me perſpici. Quid enim, ſi ſtatus quiuis a ſequente limitibus certis diſcriminetur, vt tertius inferi non poſſit? Quando ex celeritate u fit alia v, quid iubet v ad u quauis data quantitate propius accedere? Rationem dicunt, cur ex u fiat v, perſpici non poſſe, niſi hoc ponatur. Habeo, quae contra moneam; Hoc, ſi quidquam valet argumentum, oſtendit, ne quidem infinite parua quantitate v ab u differre poſſe. Nam *infinite parui ſaltus*, MAUPERTUISIO monente (***), *ſaltus tamen ſunt*, vel vt ad alterum loquendi modum

Argumentum adſeruentium.

Dubium: Lege continui ita accepta cur quiuis ſtatus aliuin ſequatur, ratio reddi non videtur.

(*) Vid. eius diſſ. de viribus viuis in Comment. Inſtit. Bononiens. Tom. II. Part. III.

(**) Hauſen El. Ar. Def. Sec. 3. conſ. d'Alembert dynamique Art. 37.

(***) Mem. de l'Acad. Roy. de Pruſſe année 1746. p. 284.

modum idem reducam: Si oportet, vt *u* abeundo in v tranſeat per mediam w, quia alias ratio, cur ex u fiat v perſpici non poteſt, oportet eodem modo, aliam inter u et w mediam fingi, vt w fiat ex u, ſed ſi haec in rigore locum habent, ſi quiuis ſtatus ſit ex alio ope intermedii, an ratio hoc redditur, quomodo v ex u fiat? Ego illam non perſpicio, ad ſeriem quaeſtionum ſine fine progredientium redactum me video. Quaero: quomodo fiat v ex u? reſpondetur: mediante w, et w ex u? mediante rurſus alia quantitate, et haec quantitas ex u? mediante rurſus alia; hic ſi nullus finis eſt, idem interrogandi, doctiorem reſponſionibus me fieri, aegre mihi perſuaſerim. Aeque ac ſiquis mihi gentis ſuae ortum ab Aenea deducturus, patrem mihi nominaret, primo loco inter ſe et Aeneam interiectum, deinde auum, poſt proauum, et ſic ſine fine pergeret, praediceretque mihi, inter quemlibet maiorum ſuorum et Aeneam alium eſſe poſitum, ego quidem ad Aſcanium, nedum ad Aeneam, difficulter hac via ſperarem me peruenturum.

§. 8. Status igitur ex alio naſcentis rationem non reddit lex continui ita accepta, ſed eam ſine fine quaerere cogit. Nonne iure aliquo inferre hic licet, rationem hoc modo inueſtigandam non eſſe? BERNOULLIUS corpora perfecte dura negauerat, quoniam, ſi duo talia corpora aequalia aequalibus et oppoſitis velocitatibus ſibi occurrant, ſubito ceſſare omnis motus debeat, et tamen quomodo a motu ſtatim quies oriatur perſpici non poſſit (*). Reſpondet MACLAURIN: ceſſationem motus quietem eſſe, cum aequales atomi ſibi occurrunt, quolibet alterum retinente, nullum eſſe inter ſtatum motus et quietis interuallum, et, deſtructa motione, quietem neceſſario ſequi (**). Scilicet non magis ignoro, quomodo ſtatim poſt motum quies oriatur, quam quomodo poſt quemuis velocitatis gradum naſcatur alius minor. Rationem ſucceſſionis adeſſe oportet, quam ne ignorem, licetne infinitam ſuccedentium ſibi graduum ſeriem adſumere? qua tamen data, nihil adhuc rationis perſpicio.

Exemplum ex Bernoullio.

§. 9. Iudicent, qui rem intelligunt, an recte ſentiam: Quas in *continuo* concipimus partes, earum vnam ab alia, magnitudo ſola diſtinguit, quae in rerum natura exiſtunt, limitibus ſuis circumſcriptam habent eſſentiam. Igitur in continuo termini adſignari, ſectiones fieri poſſunt vbique, cum alia omnia ſint in rebus exiſtentibus. Corpus geometricum vbicunque ſecaueris, partem a parte ſeparas, et ſegmento, quamcunque libet, figuram concilias; in corpore phyſico ſectiones ſaepe per poros agentur, neque diuellent partes, quae non cohaeſerant, neque figura qualibet terminari poteſt

Partes continui et rerum exiſtentium vt differant?

 corpus

(*) Diſc. ſur le mouv. ch. I. art. 7.

(**) In answer, we need only to obſerve, that to ceaſe to move, is the ſame as to be at reſt, and that when equal atoms ſtop each other there is no interval between the ſtate of motion and that of reſt, and that when motion is deſtroyed, reſt neceſſarily enſues. Col. Maclaur. Account of Sir Iſ. Newtons philoſophical diſcoveries B. I. ch. 4. p. 88.

corpus, ſed ea quam partes extremae admittant. Arenarium lapidem ad marmoris nitorem laeuigari, partium conditio non patietur.

Diſtorum ad ſucceſſiua applicatio.

§. 10. Eadem ad ſucceſſiua applicemus. Sint u et v duo ſtatus ſe ſubſequentes, puta duae puncti moti velocitates. Mathematico quidem abſtracte haec conſideranti, et v ab u ſola magnitudine diſtinguenti, poſſunt inter vtramque quantitatem quotcunque intermediae cogitari. Num idem licebit, ſi determinatum vtrumque ſtatum, quia exiſtit vterque eſſe debere, perſpiciamus? Quod exiſtit, determinatum eſt, propriisque limitibus continetur; ſi fluens u abeat in v ſitque $v = u + d u$ exiſtente $d u$ elementari, erit $d u$ natura ſua indeterminabilis (*) et adeo etiam v, cum id ſolo $d u$ ab u differat. Quis igitur mihi perſuaſerit, perſpici poſſe a me quomodo fiat v ex u, quando dicitur id fieri, accedente ad u aliquo indeterminabili? Et quis diuerſas eſſe v et u, et re ipſa exiſtentes, mihi oſtenderit, quando differentia indeterminabili ſeparantur, contra vero determinatum eſſe quod exiſtit, notio communis videtur? Nam illo NEWTONI praeceptore teſte, cuius immortalibus in operibus, calculi fluxionum aurora quaſi affulget, *deſultoriam et indeterminatam quantitatem habere, eſt habere nullam; eſt enim aliquid determinate quicquid eſt, quod vbique eſt, nunquam eſt* (**).

Quando locum habeat lex continui.

§. 11. Id video, ſi in ſtatuum ſibi ſuccedentium ſerie nihil ſit, quod vnum ab altero propriis et definitis limitibus diſtinguat, fluxum continuum poni poſſe. Talem agnoſco puncti a vi acceleratrice ſollicitati motum aut corporum, quae preſſioni cedunt, conflictum. Sed, ſi ex rei natura pateat, ſtatum praeſentem non ſequi poſſe alium quemuis, illi quantumlibet proximum, ſed ſequi neceſſario certum atque definitum ſtatum, aſſignabiliter a priore diuerſum; fateor, eo me propendere, vt cum MACLAURINO *legem continuitatis ſine ſufficiente ratione vniuerſalem ſupponi* (***) pronunciem. Maxime vero videtur hoc accidere poſſe, ſi non de *phaenomenis*, ſed de *primis phaenomenorum rationibus* diſputetur. Continuum in *extenſione* ſine dubio phaenomenis ſatisfacit, quale in *apparente* mundo oculis ſubiicitur, in vero etiam eſſe, difficulter quis mihi perſuaſerit, eundem in modum *in phaenomenis* legem continui recte adhiberi exiſtimauerim, poſſitne ad *intimam rerum naturam* transferri, ſubdubito. Transfertur vero ad eam, ſi atomos in ratiocinio Bernoulliano §. 8. illa eliminari poſſe credatur. In apparenti contra rerum ſyſtemate *legis continui* vſus innumeris exemplis oſtendi poteſt, inter quae eminet principium hydraulices IO. BERNOULLII (†). Non id ſumo mihi, vt de Bernoulliano inuento, quod EULERO placuit, iudicem, id tamen doceri cuperem, poſſitne illo gurgite, cuius nec figuram, nec magnitudinem, ſed *ſolam*, *qua generatur*, *vim* conſiderat inuentor, adeoque tota

Potiſſimum in phaenomenis.

forte

(*) Hauſen El. Arith. Schol. Pr. 20.

(**) *Barrow* lectione Mathem. a. 1666. quinta p. 262. ed. Lond. 1684.

(***) Treatiſe on Fluxions §. 521. rem.

(†) Hydraulica Opp. Tom. IV. n. 186. Act. Acad. Petrop. Tom. VIII.

forte hac legis continui applicatione carere, qui cum MACLAURINO (*) conſide-
rauerit, partem aliquam grauitationis totius maſſae aqueae ad accelerandum eius, quae
effluit, motum impendi (**). Sed de his nec breuiter diſſeri poteſt, nec auſim hic
de re tam ardua pronunciare, quando de virium viuarum principio, caſibus, vbi
velocitas ſubito in aliam, finito diſcrimine a priore differentem abit applicato; cum
DANIELE BERNOULLIO diſputare video D'ALEMBERTIUM (***).

§. 12. Rationem, cur ſic *apparens* a *vero* diſtinguam, ſi quis ex me quaerat, *Eius ratio.*
hanc reddam: In phaenomenis plura, quae a ſe inuicem non diſtinguimus tanquam
vnum aliquod conſtituentia nobis ſentiuntur, vnde licet intra terminos eius, quod
confuſe a nobis percipitur totius, ſectiones vtcunque agere, quia partes, quas adeſſe
oportet, coniunctas non ſingulas cognoſcimus, adeoque pro lubitu definire illas poſ-
ſumus. Aliud eſt in vero rerum ſtatu, in quo definitae ſunt partes, vt, vbicunque
libet, ſeiungi non poſſint, ſed ita ſeiungendae ſint, vt natura illarum patitur. De
phaenomenis dum ratiocinamur, notiones noſtras non omnia, quae rebus competunt,
ingrediuntur, ſed quaedam ſolummodo; ita corporis id phaenomenon, quod *exten-*
ſionem vocamus, a reliquis innumeris corporis adfectionibus ſeparatum, geometria
contemplatur. Quae igitur in generali illa notione determinata non ſunt, illa pro *Geometria abſtractis notionibus nititur, non imaginariis.*
arbitrio noſtro determinare licet, ſed non licet propterea, quae inde colligimus, vbi-
uis adhibere, ſi alio in loco determinatae magis notiones adſint, prioribus generali-
tatem ſuam non relinquentes: quod ſi quis faciat, tum demum *imaginariis* notionibus
vti dicatur, geometriam ipſam enim certiſſimam ſcientiarum *imaginariis* niti, nun-
quam conceſſerim, *abſtractas* adhibere, vt ſcientiae omnes, lubens fateor; ſed quae
in abſtractis locum habent, ſine diſcrimine ad eos caſus transferendo, in quibus plures,
quae adſunt, determinationes, ex ſolis abſtractis, vt ratiocinemur amplius non per-
mittunt, id eſt, *imaginaria* pro veris habere, quod ſi geometrae aliqui interdum
fecerunt, non recte propterea geometriae fundamenta imaginaria vocaueris. Haec
autem longius perſequi hic nihil attinet.

§. 13. Ceterum, quae protuli, facile videbunt aequi aeſtimatores, non eo ſpe-
ctare, vt ſummos, quibus *lex continui* probabilis viſa eſt, viros ambitioſius erroris
redarguam, ſed vt profitear, non ſatis mihi ſentiri magnam vim argumentorum,
quibus vtuntur, alia vero videri in contrarium facere. Qui igitur argumentis illis
maiorem lucem addere, ea vero, quae monui, remouere nouerit, apud eum ſpero
fraudi mihi non futurum; quod de lege MAUPERTUISIO, et COLINO MACLAU-
RINO negata, ego non veritus ſum dubitare.

(*) Treatiſe on Fluxions §. 537.

(**) Ea de re poſt accuratius diſſerui in libro: *Anfangsgründe der Hydrodynamik* (Gott. 1769) §. 472.

(***) Traité de l'equilibre, et du mouv. des Fluides §. 123. 143. et alibi.

XIIII.

Vnde plures insint Radices Aequationibus Sectiones Angulorum definientibus Inuitatio ad audiendam orationem aditialem muneris: matheſin et physicam publice docendi.

Problema de angulo in partes n ſecando, ſolui aequatione dimenſionum n, geometris notum eſt, indeque conſtat, ita inſtitutam eſſe quaeſtionem, vt eidem tot reſponſa ſatisfaciant, quot partes anguli fieri debent. Horum vero reſponſorum numerum a priori, et ex ipſis quaeſtionis conditionibus definiendum exiſtimaui, tum vt apertius fiat, quid in analyſibus ad ſectiones angulares inueniendas inſtitutis, proprie quaeratur, tum vt pateat, quaenam radix aequationis, tot diuerſas habentis, vſui futura ſit. Qui haec in libris analyticis generaliter oſtenderit, noui neminem. Non diffiteor, ex Cel. EULERI *Introductione in analyſin infinitorum* colligi poſſe quae huc pertinent, puta ex Libri I. cap. VIII et XIIII; ſed illa variis in locis diſperſa ſunt, nec eo fine ſcripta vt id de quo acturus ſum inprimis illuſtretur, aequatonibus denique angularibus ipſis intermixta, quae ita ſe habent ad praeſentem inueſtigationem, vt experimenta quorum euentus praedici ex theoria potuit, ad theoriam hanc ipſam. Quod enim de angulo quouis in partes aliquot ſecando, quaeſtio analytice propoſita, non ſimplex ſit, ſed multiplex, id ipſa aequatio docet, quae prodit: Mihi animus eſt, quod talis aequatio prodire debeat, etſi nunquam illam ipſam inueſtigaſſemus, perſpicuum reddere.

1. Primam de his cogitandi occaſionem locus aliquis *Arithmeticae vniuerſalis* NEWTONI dedit, cum illam ante hos XX annos LIPSIAE a B. HAUSENIO explicari audirem. Exſtat ille in articulo de *natura radicum aequationis* p. 180 Ed. *s' Graues.* vbi oſtendit geometra, quaeſita circuli in quinque partes ſectione quintuplex aliquid quaeri. Poſtea, KEPLERI *harmonicen mundi* legens, inſigni cum voluptate vidi, ſummum virum, vt in phyſica coeleſti NEWTONO praeiuit, et haec ante NEWTONUM tractaſſe, nam Lib. I. Pr. 45 p. 35 itidem oſtendit, aequationes coſſicas quibus tunc IUSTUS BYRGIUS ad circulum in partes ſeptem ſecandum vtebatur, praeter latus heptagoni, diagonales etiam continere. In haec autem quod generaliter inquiſiui, fecerimne operae pretium, illorum iudicium eſto, qui malunt ſuppoſita analyſeos diſtincte percipere, quam iis non ſat intellectis immenſam calculorum molem ſuperſtruere, creduntque Cel. DAN. BERNOULLIO, de analyſi abſtracta quam nullo quaeſtionis ſynthetico examine inſtituto ſequimur, non omnino benigne iudicanti (*).

I. Chor-

(*) Mem. de l'Acad. Roy. de Pruſſe 1753. p. 148. Une analyſe abſtraite, qu'on ecoute ſans aucun examen ſynthetique de la queſtion propoſée, eſt ſujette á nous ſurprendre plutôt qu'á nous eclairer.

I. Chordae.

2. Incipiam igitur a chordarum consideratione, ostensurus, si ex data chorda arcus alicuius, quaeratur chorda arcus qui sit $\frac{1}{n}$ prioris, id quaeri, cui n diuersis modis responderi possit.

3. In circulo ADBE, sit arcus $ADB = w$, eius chorda AB. Iam eadem AB est chorda arcuum omnium eius circuli, ad A et B terminatorum. Igitur si incipiendo ab A, et transeundo per DBEA describatur peripheria integra, huicque arcus AB adiiciatur, erit AB chorda arcus $ADBEADB = w + P$. Sed si eodem modo, incipiendo ab A, et pergendo versus D describatur peripheria ADBEA, bis, ter, cet, adiecto singulis vicibus arcu AB, semper habebitur arcus incipiens in A, et terminatus in B. Dicta ergo peripheria $= P$ est recta AB, communis chorda arcuum Fig. 1.

$$\text{I. } w,\ w + P,\ w + 2P,\ \cdots\ w + mP$$

notante m integrum positiuum quemuis.

4. Obseruandum vero est, etsi chorda AB arcubus his omnibus *quantitate* eadem respondeat, *signo* tamen, quod in calculis analyticis consideratur, eamdem non esse. Scilicet, vt cosinus et tangentes arcuum quadrante maiorum, semicirculo minorum, iidem sunt quantitate cum cosinubus et tangentibus arcuum quadrante minorum, signis tamen oppositis (*) gaudent, ita chorda arcus w peripheria minoris positiua adsumta, arcuum $w + P$, $w + 3P$, $\cdots$ $w + (2k+1)P$ chordae negatiuae sunt, sed arcuum $w + 2P$, $w + 4P$, $\cdots$ $w + 2kP$ positiuae si k sit integer positiuus. Cogitetur enim AB circa A velut circa centrum reuolui, puncto B transeunte perimetrum BEA, manifestum est, vbi B venit in A, euanescere BA et deinde cum B pertransit arcum ADB renasci, sub conditione opposita. Vnde cum addendo ad arcum AB, peripheriam integram, chorda quauis vice semel per statum euanescentiae transeat, consequens est, vt alternatim positiua et negatiua renascatur. Dixi qualibet vice *semel* transitum hunc fieri; nam si dum additur vnica peripheria *bis* fieret, quod non contingere satis euidens est, posset chorda quae positiua euanuit, positiua renasci, plane vt fig. 2. si ordinatae PM referantur ad axem AB, curuae in A, B, occurrentem transeundo in A per o, fiunt negatiuae $\pi\mu$ et deinde secundo transitu per o in B, rursus positiuae q m: sed axe NC n curuam in C tangente Fig. 2.

(*) F. C. Maieri Trigonometrica §. 2. Comm. Ac. Sc. Petrop. T. II. p. 13. errat vero is cum tangentem obtusi anguli positiuam sumit, vt patet ex lege qua signa tangentium alternantur infra §. 72. ostendenda. Dum haec vt edantur transscribo, video Cel. de SEGNER, in nuper demum editis Elem. Arith. Geom. et Calculi geometrici p. VIII sequ. post praefationem, de tangente anguli obtusi obseruasse, quod negatiua sit, ad tangentes arcuum hemicyclo maiorum vt progrederetur scopus quem sibi propositum habebat non postulabat.

gente ordinatae QN ante C et q n poſt C poſitiuae ſunt, quia in C duo tranſitus per ſtatum euaneſcentiae concipiuntur, interſectionibus duabus quae in A et B diſtinctae erant ibi coeuntibus.

5. Ergo chorda + AB pertinet ad arcus

II. $w, w + 2P, \ldots\ldots w + 2kP$

et chorda — AB ad arcus

III. $w + P, w + 3P, \ldots\ldots w + (2k+1)P$

6. Pertinet vero etiam chorda AB ad arcum

$$BEA = P - w, \text{ et } BEADBEA = 2P - w$$

et ſic porro, adiiciendo ſemper peripheriam. Intelligiturque ex 5. pertinere chordam + AB ad arcus

IIII. $P - w, 3P - w, \ldots\ldots (2k+1)P - w$

Sed chordam — AB ad arcus

V. $2P - w, 4P - w \ldots\ldots 2kP - w$

His autem ſeriebus continentur magnitudines arcuum omnium ad chordam AB quomodocunque terminatorum. Nam ſi B punctum loco A ſumatur eosdem arcus prodituros manifeſtum eſt.

7. Quaerere chordarum ope arcum qui ſit $\frac{1}{n}$ arcus chordae datae AB, eſt quaerere chordas omnes, arcuum omnium quorum quilibet eſt $\frac{1}{n}$ arcus alicuius ſeriebus II, IIII, contenti ſi chorda AB ſumatur poſitiua, ſed ſeriebus III, V, contenti ſi ſumatur negatiua.

8. Diuiſis ſerierum (5. 6.) arcubus ſingulis per n, oriuntur

VI. $\frac{w}{n}, \frac{w+2P}{n} \ldots\ldots \frac{w+2kP}{n}$ ex II

VII. $\frac{P-w}{n}, \frac{3P-w}{n} \ldots \frac{(2k+1)P-w}{n}$ ex IIII

hae duae pro chorda + AB. Sed

VIII. $\frac{w+P}{n}, \frac{w+3P}{n} \ldots \frac{w+(2k+1)P}{n}$ ex III

VIIII. $\frac{2P-w}{n}, \frac{4P-w}{n} \ldots \frac{2kP-w}{n}$ ex V.

Pro chorda — AB.

9. Harum

9. Harum ſerierum ſeparentur partes eae quae continent arcus peripheria minores, initiales ſingularum, nam ab initio creſcere arcus manifeſtum eſt Hic autem duo caſus diſtinguendi ſunt.

10. *Caſ.* I. Si n impar. Oriuntur

X. $\frac{w}{n}, \frac{w+2P}{n} \ldots \frac{w+(n-1)P}{n}$ ex VI.

XI. $\frac{P-w}{n}, \frac{3P-w}{n} \ldots \frac{nP-w}{n}$ ex VII.

XII. $\frac{w+P}{n}, \frac{w+3P}{n} \ldots \frac{w+(n-2)P}{n}$ ex VIII

XIII. $\frac{2P-w}{n}, \frac{4P-w}{n}, \ldots \frac{(n-1)P-w}{n}$ ex VIIII.

11. Pro numero terminorum in ſerie quauis definiendo, obſeruetur illum aeſtimari poſſe ex eo quod in P vbique ducitur, termino ſcilicet progreſſionis arithmeticae, differentiam habentis 2. Igitur cum dictis ſeriei arithmeticae primo termino, vltimo, et numero termino reſpectiue A, V, N, differentia $= 2$, ſit $N = \frac{V-A+2}{2}$ hic pro X eſt $A = 0$, $V = n-1$, vnde $N = \frac{n+1}{2}$; Tantus etiam prodit pro XI, ſed $\frac{n-1}{2}$, pro XII. XIII.

12. Series X, XI. eamdem habent differentiam $\frac{2P}{n}$, et terminorum numerum eumdem (11). Ergo quam ſummam efficit primus X additus vltimo XI, eamdem exhibent ſecundus X et penultimus XI, nec non tertius X et antepenultimus XI, ſeu termini duo, quorum vnus tantum remotus eſt ab initio ſeriei X quantum alter a fine ſeriei XI, vel contra, eamdem conſtanter ſummam exhibent; quantum enim vnus a proxime praecedente creuit vel decreuit, tantum alter a ſuo praecedente creuit vel decreuit. Conſtans autem haec ſumma eſt P. Vnde ſeries XI non alias habet chordas quam X, ſed chordas ſeriei X ordine retrogrado ſumtae, magnitudine ceterum et ſigno easdem (3. 6.)

13. Simili plane ratiocinio euincitur chordas ſeriei XIII easdem eſſe cum chordis ſeriei XII ordine retrogrado acceptae.

14. Arcus duo inaequales, tunc demum eamdem chordam habent si additi constituant peripheriam vel eius multiplum. Quaeritur an hoc contingere possit arcubus duobus, vni ex X, alteri ex XII desumto? Est autem seriei X, $(h+1)$ tus ab initio $= \frac{w + 2hP}{n}$ et seriei XII, l, tus a fine $= \frac{w + (n - 2l)P}{n}$. Horum summa duplo peripheriae maior esse non potest, cum neuter peripheria maior sit. Hinc, si summa debeat esse peripheriae dupla, vterque debet esse peripheriae aequalis. At, cum w non sit peripheria maior, vltimus XII, hoc est eius seriei maximus, peripheria minor est. Ergo summa quam dixi, non est duplae peripheriae aequalis. Ponatur ergo aequalis peripheriae simplae, et statuatur $w = \frac{mP}{n}$, vbi, si libet, fingatur m tam integer quam fractus, non tamen maior ipso n. Prodibit aequatio $\frac{m}{n} = l - h$. Cuius pars dextra cum sit numerus integer, pars sinistra debet esse vel o, vel 1, nam maior quam 1 esse non potest ob m non maius quam n. Priori casu $w = o$ et $l = h$, altero $w = P$ et $h + 1 = l$. Aliis ergo valoribus ipsius w omnibus, chordae seriei XII a chordis ser. X diuersae sunt.

Si arcus duo M, N, efficiunt $M + N = P$ etiam illorum supplementa ad peripheriam $P - M$, $P - N$ efficiunt $2P - M - N = P$. Sed supplementum vnum, arcui alteri adiectum non efficit P, v. g. $P - M + N = 2.(P - M)$. Vnde licet v. g. vltimus XII habeat chordam eamdem cum primo XIII (13) et posito $w = P$ eamdem cum primo X, non tamen sequitur vt primi XIII & X, eamdem chordam habentes constituant P, sed efficiunt $\frac{2P}{n}$ quod vtique duplum est ipsius $P - M$ seu N, hoc est $\frac{w}{n}$ posito $w = P$. Scilicet primi XIII et X aequales sunt, quilibet nempe supplementum vltimi XII ad circulum. Vnde patet cur demonstrationem a X et XII, non a X et XIII exorsus sim. Imo ex X et XIII ob w ex summa exiens colligi nihil potuisset.

15. Numerus chordarum (12) est $\frac{n+1}{2}$ et (13) $\frac{n-1}{2}$ (11) summa exsistente n, omnes autem positiuae sunt, cum spectent ad arcus perimetro minores.

16. In serie VI sit $2k = fn + g$, diuiso scilicet 2k, quod ipso n maius iam sumo, per n, vt f indicet quoties contineatur n integrum in 2k, et g sit residuum ex diuisione ipso n minus.

17. Hic ergo sit g par, ob $fn + g$ parem debet esse fn par; nam impar pari additus imparem summam facit: Ergo ob n imparem est f par et seriei VI terminus

genera-

generalis abit in $\frac{w + gP}{n} + fP = S$ chordam habentem magnitudine et ſigno eamdem cum chorda arcus $\frac{w + gP}{n}$ obueniente in ſerie X. Hi ergo arcus nullas nouas chordas exhibent, ſed poſitiuas ad arcus X pertinentes, etiam adſciſcunt.

18. Sit g impar, erit fn et adeo f impar, et S habet chordam, chordae arcus $\frac{w + gP}{n}$ aequalem ſed oppoſitam (4). At arcus hic quaeri debet in ſerie XII. Iam vbi par 2k ab $fn + 1$ creſcit ad $fn + n - 2$, quod quidem fiet, quia 2k tranſit per pares omnes, creſcit g ab 1 ad $n - 2$ et exhibet ſucceſſione hac coefficientes omnes ipſius P in XII. Ergo hi arcus S, dant chordas negatiuas ſeriei XII, numero $\frac{n - 1}{2}$ (15).

19. In ſerie VII ſit $2k + 1 = fn + g$ ſit terminus generalis $= \frac{gP - w}{n} + fP = T$

20. Sit g impar eſt f par et arcus T habet chordam poſitiuam eamdem cum aliqua ſeriei XI, hoc eſt X (12).

21. Si g par eſt f impar et chorda arcus T negatiua eſt chordae alicuius ſeriei XIII, hoc eſt XII (13). Hoc caſu eſſe poteſt $g = o$ et chorda arcus $fP - \frac{w}{n}$ ſeu $(f - 1) P + \frac{nP - w}{n}$ eadem eſt magnitudine et ſigno cum chorda vltimi arcus ſeriei XI.

22. Sectio arcus chordae + AB in partes numero impari n, praebet chordas poſitiuas $\frac{n + 1}{2}$ ob ſeries X, XI (15) et easdem magnitudine et ſigno rurſus chordas ob arcus S (17) et T (20) praeterea negatiuas chordas $\frac{n - 1}{2}$ ob arcus S (18) et T (21). Igitur aequatio pro hac ſectione habet radices numero n, poſitiuas vna plures quam negatiuas, et quae inprimis quaeritur chorda arcus $\frac{w}{n}$ inter poſitiuas latet.

23. Seriei X terminus vltimus maior eſt peripheria dimidia ob n maius quam 2. Chorda eius vero, maior erit chorda primi quae proprie quaeritur, ſi ſubductus a peripheria integra, reliquit arcum primo maiorem. Relinquit vero arcum $\frac{P - w}{n}$ qui

qui primo maior est tunc cum w minor $\frac{1}{2}$ P, minor si w maior $\frac{1}{2}$ P, aequalis si $w = \frac{1}{2}$ P. Ergo radicum positiuarum minima est chorda arcus quaesiti $\frac{w}{n}$ si fit w minor $\frac{1}{2}$ P, sed chorda arcus P — w si w maior $\frac{1}{2}$ P. Quodsi ergo dentur radices positiuae omnes, crescent a minima quadam ad aliquam maximam, deinde rursus decrescent. Minimae duae extremae erunt chordae arcuum $\frac{w}{n}$ et $\frac{P - w}{n}$, ex adducta ipsius w conditione facile distinguendae. Patet ambiguitatem hanc nasci a simili relatione arcuum w et P — w ad chordam eamdem.

24. *Ex.* 1. Quaeratur trisectio semiperipheriae, est $w = 180^\circ$, $n = 3$ et dicta chorda quaesita X est (ex HAUSEN. El. Mathes. in Calc. Ext. p. 182) $X^3 - 3X + 2 = 0$ ob chordam $AB = 2$. Huius aequationis radicem vnam constat esse $= 1$ ob $\frac{180}{3} = 60$ Vnde diuisa illa per $X - 1$ prodit $X^2 + X - 2 = 0$ cuius radices sunt -2 et $+1$. Scilicet hoc casu series X fit 60, 300, dans duas chordas positiuas $+1$, $+1$, et series XII fit 180, dans chordam negatiuam. Seriei X ambae chordae aequales sunt ob $w = \frac{1}{2}$ P (23).

25. *Ex.* 2. Pro §. 23. illustrando fit $n = 5$, et $w = 50$, fit series X. 10, 154, 298, vbi $360 - 298$ maior quam 10. Sed pro $w = 200$ fit eadem series 40, 184, 328 vbi $360 - 328$ minor quam 240.

26. Perspicuum est (23) quaerendo $\frac{1}{n}$ arcuum chordae + AB, reperiri chordas arcuum qui sunt $\frac{1}{n}$ arcuum chordae + AB positiuas, et simul arcuum qui sunt $\frac{1}{n}$ arcuum chordae — AB, negatiuas.

27. Venio iam ad *Cas.* II. (10) Sit n par. Oriuntur.

XIIII. $\frac{w}{n}, \frac{w + 2P}{n} - \frac{w + (n-2)P}{n}$ ex VI.

XV. $\frac{P - w}{n}, \frac{3P - w}{n} - \frac{(n-1)P - w}{n}$ ex VII.

XVI. $\frac{w + P}{n}, - \frac{w + (n-1)P}{n}$ ex VIII.

XVII. $\frac{2P - w}{n}, \frac{4P - w}{n} - \frac{nP - w}{n}$ ex VIIII.

28. Me-

28. Methodo (11) reperitur ſingulas harum ſierum habere terminos $\frac{1}{2}$ n.

29. Chordae ſeriei XV eaedem ſunt cum chordis ſeriei XVI ordine retrogrado ſumtis: Similiter vltimus terminus ſeriei XVII eandem chordam habet cum primo ſeriei XIIII, et illius penultimus cum huius ſecundo, et ſic porro. Oſtenditur vt (12).

30. Seriei XIIII l tus a ſine eſt $\frac{w + (n - 2l) P}{n}$ et ſeriei XVI h tus ab initio $= \frac{w + (2h - 1) P}{n}$ Hi additi non poſſunt efficere ſummam duplae peripheriae aequalem, cum neuter poſſit ſimplam peripheriam excedere, vltimus XIIII vero, eius ſeriei maximus, peripheria ſimpla ſit minor. Igitur, ſi chordam eamdem habere debent, oportet vt ſimplam peripheriam conſtituant. Summa ergo hac poſita $= P$ et dicto $w = \frac{m}{n} P$ (vt 14) obtinetur aequatio $\frac{2m}{n} = 2l - 2h + 1$ in qua non poteſt eſſe $m = o$ cum par $2h$ imparem $2l + 1$ deſtruere non poſſit. Debet autem $\frac{2m}{n}$ eſſe impar et m non maius ipſo n Ergo poni opportet $\frac{2m}{n} = 1$ vnde $h = l$. Niſi ergo $w = \frac{1}{2} P$, chordae arcuum XIIII et XVI diuerſae ſunt.

31. Quatuor ergo hae ſeries habent chordas diuerſas numero n.

32. In ſerie VI (8) ſit $2k = fn + g$ vt (16) et reperietur S vt (17). Sit g par, et iam eſſe poteſt f par vel impar cum ſemper futurus ſit fn par.

33. Sit f par et arcus S chorda poſitiua eſt, reperiunda inter chordas XIIII.

34. Sit f impar, arcus S chorda eſt negatiua alicuius ex XIIII. Cum ergo g habere poſſit valores omnes inde a o ad $n - 2$, dantur chordae negatiuae $\frac{n}{2}$

35. Sit g impar: Erit $fn + g$ impar propter fn parem qualiscunque ſit f. Haec ergo ſuppoſitio pro $2k$ locum non habet.

36. Repetito (19), ſit g impar; Poteſt eſſe f par, et T habet chordam poſitiuam, reperiundam inter chordas XV.

37. Si vero ſit f impar, arcus T chorda, eſt negatiua cuiusdam reperiundae inter chordas eiusdem XV. Hic quia o cenſetur numerus par non licet facere $g = o$, quod nec ſeries XV admittit.

38. Propter fn parem, non poteſt eſſe g par in ſuppoſitione (19).

39. Diuiſio in partes numero pari, dat chordas $\frac{n}{2}$ poſitiuas arcuum XIIII (33) et totidem alias poſitiuas arcuum XV (36) negatiuas praeterea, ſingulas ſingulis XIIII (34) et XV (37) oppoſitas; chordas igitur n poſitiuas et totidem illis aequales ſed oppoſitas.

40. Ae-

40. Aequatio pro ſectione in partes numero pares, habet radices 2n, quae diuidi poſſunt in aequalium ſed oppoſitarum paria n. Harum radicum tam poſitiuae quam negatiuae pertinent ad arcuum chordae — AB reſpondentium diuiſiones (29).

41. Sint aequationes radicales pro vno pari talium radicum $X - a = 0$, $X + a = 0$ quae dent $X^2 - a^2 = 0$ et manifeſtum eſt aequationem pro ſectione in partes pares oriri ex factoribus quadraticis, exhibito ſimilibus. Vnde conficitur ineſſe illi potentias radicis ſaltim pares, terminorum vero ſigna alternare, quod et HARRIOTI regula poſtulat. Aequatio vero haec gradus 2n ſtatim reducitur ad aequationem gradus n., ſubſtituto y in locum X^2. Quare ſi in poteſtate ſit reſolutio aequationis y continentis, in poteſtate etiam eſt reſolutio aequationis X continentis hoc eſt ſectio in partes 2n.

42. Vt redeam ad caſ. I. (10) notum eſt inueſtigari chordam arcus multipli AB quam vocabo C, per chordam arcus ſimpli X, et hinc effici aequationem quae dato C, definit X, ea multiplicitate cuius rationes ante oſtendi. Iam ſi adſumta — C quaeruntur X ei reſpondentes, chordae arcuum XII, XIII, reperientur poſitiuae, negatiuae vero, arcuum X, XI, chordis oppoſitae et aequales, quod patet, methodum §. 16. ſqq. applicando ad ſeries VIII, VIIII; Ergo aequatio inter + C et + X talis eſſe debet, vt abeunte + X in — X abeat + C in — C. Hoc eſt C debet eſſe functio impar ipſius X. Vnde ſectio in partes numero impari, definitur aequatione non niſi imparium exponentium potentias continente (*).

Sectio-

(*) Tradideram haec iam typographo, cum inter libros meos in manus incidit ALEXANDRI ANDERSONI ſcriptum Pariſiis 1615 in 4° editum *Ad angularium ſectionum analyticen theoremata καθολικωτερα, a* FRANCISCO VIETA *Fontenacenſi primum excogitata at absque vlla demonſtratione ad nos transmiſſa, iam tandem demonſtrationibus confirmata.* Auctor aequationes inter ſinus, chordasue angulorum ſimplorum et multiplorum demonſtrat, generali etiam progreſſus lege ex coefficientibus potentiarum binomii indicata. Libellum obiter olim legeram, certus, haec me iam melius a BERNOULLEIS, HERMANNO, WOLFIO, HAUSENIO didiciſſe, formulae enim eaedem ſunt quae apud hos leguntur: Iam vero libebat eo attendere, an quid de hac aequationum multiplicitate, vel cauſſis eius differuiſſet. Vidique non omnino illum latuiſſe, vniuerſaliter tamen ſatisque exacte non examinaſſe. Nam theoremati 3. pag. 40. hoc ſubiungit conſectarium; „Quoniam eadem recta circulo inſcripta „non diameter, duabus circumferentiis „ſubtenditur quarum vna minor eſt ſemi-„circumferentia circuli, altera maior, „aequalitas inter ſubtenſam maiori mi-„noriue et ſubtenſam ſegmento mino-„ris, pertinebit ad ſubtenſam quoque „ſimili ſegmento maioris, et ad ſubten-„ſas denique reliquis circumferentiis, „quae aeque multiplices maiorem mino-„remue in circulationibus componunt.„ Vltima verba oſtendunt vidiſſe eum ſimile quid illi quod §. 9. ſeqq. deduxi, ſed nec haec accuratius explicauit, nec multiplicitatem radicum omnino intellexit; nam de negatiuis nihil plane habet, in applicatione vero ad caſus particulares, errat. Ita pag. 42. *angulum in tres partes ſecare*

aequa-

43. Pro perimetro secanda, est $C = o$ (4. 41) et $w = P$. Vnde valore hoc substituto in X et XI, scripto autem Z in locum $\frac{P}{n}$ nascuntur

XVIII. $Z, 3Z, \ldots nZ$ ex X.
XVIIII. $2Z, 4Z, 6Z, \ldots (n-1)Z$ ex XII.

chorda arcus nZ vel P est $= o$. Reliquorum terminorum XVIII chordae, eaedem sunt cum chordis XVIIII ordine retrogrado sumtis, nam $Z + (n-1)Z = P$ et sic porro (14).

44. Si partes aequales circuli, numero impari sint f. 3. AB, BC, CD, DE, Fig. 3.
EF, FG, GA, daturae polygonum regulare circulo inscriptum, radices aequationis ad quam peruenitur ponendo chordam arcus w seu P nihilo aequalem, sunt binae quidem, polygoni latera veraeque chordae AB, AG, reliquae chordae arcuum multiplorum ipsius Z, hoc est diagonales polygoni AC AD, AE, AF, vna excepta quae est $= o$ chorda scilicet peripheriae integrae. Praeterea radices hae alternatim sunt positiuae et negatiuae vt si AB sit positiua, ipsius AC valor ex XVIIII desumtus sit negatiuus, ipsius AD rursus positiuus, et ipsius AE negatiuus &c. Hinc altera chorda AG obtinetur valore negatiuo. Haec deducuntur ex 22.

45. Seriei XVIIII termini tot sunt quot XVIII, demto huius vltimo (11) et in ambabus simul, omisso vltimo XVIII sunt numero pari $n - 1$, praeterea aequationi (43) inest cuiusuis XVIIII chorda negatiua, et aequalis chordae alicui ex XVIII (42). Habet igitur aequatio radicem vnam $= o$ hoc est, dicta X chorda quaesita, diuisibilis est per X, et secunda aequatio, ex hac diuisione orta, gradus est paris, continens ipsius

aequatione nota, quam §. 24. adhibui docet, illam vero suis signis ita explicat: „Posito X radio seu semidiametro circuli, „B subtensa anguli secandi, E, subtensa „segmenti. X quadratum in E ter, minus „E cubo, aequetur X quadrato in B, et „fiet E duplex: 1. Subtensa circumferen„tiae subtriplae 2. Subtensa circumferen„tiae reliquae, ad integrum circulum „subtriplae.„ Falli autem in eo statim patet quod aequationis cubicae radicem duplicem statuit, enumerat vero saltim duos terminos ser. X (10) qui hoc casu prodeunt, quorum vltimus est primus XI (12) Sed vnicum seriei XII, qui etiam continetur aequatione omittit. Est autem chorda quam omittit negatiua (22). Similiter problematio II. ibid. de quinquesectione, enumerat duos priores X, et primum XI, rursus omissis XII, qui darent chordas negatiuas. Tandem problematio III de septisectione enumerat primos tres X et primum XI. Igitur chordarum negatiuarum rationem nullam habuit. Vnde quantum abfuerit a perfecta aequationum harum theoria facile intelligitur. Sed mirum non est eos qui primi nouis et arduis inuestigandis occupantur, non omnia statim inuenire, quod addo ne quis existimet, scribere me haec gloriae Andersonii minuendae caussa, qui hoc scripto insigne ingenii acumen ostendit.

ipſius X potentias tantum pares, adeoque poſita $Y = X^2$ reducibilis ad tertiam gradus $\frac{1}{2}n$, cuius radicum quaelibet poſitiue et negatiue ſumta, duas radices ſecundae exhibet.

46. Chorda autem $\frac{1}{11}$ P quae proprie quaeritur erit Y minimum inter omnia.

47. Pro heptagono eſt $X^7 - 7X^5 + 14X^3 - 7X = 0$, quod (*) reducitur ad $y^3 - 7y^2 + 14y - 7 = 0$ et vnum $\pm\sqrt{y}$ erit AB, AG, ſecundum AC, AF, tertium AD, AE, et heptagoni conſtructio pendet ab aequatione cubica.

48. Pro pentagono eſt $0 = X^4 - 5X^2 + 5$ ſeu $y^2 - 5y + 5 = 0$ (**) vnde $y = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ et duo X erunt $\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, alia duo $\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Cum vero vltimus duplex valor det latus pentagoni (45) prior exhibebit diagonales duas aequales. Eſt autem diagonalis quaelibet pentagoni, chorda arcus dupli eius quem ſubtendit latus: Iam cum chorda arcus alicuius dupli, ſit factum ex chorda arcus ſimpli in chordam ſupplementi arcus ſimpli ad $\frac{1}{2}$P, erit chorda arcus $\frac{2}{5}$P $= \sqrt{(\frac{5-\sqrt{5}}{2})}$. $\sqrt{(4 - (\frac{5-\sqrt{5}}{2})^2)} = \sqrt{(\frac{5+\sqrt{5}}{2})}$.

49. Patet vero cur pentagoni conſtructio problema planum ſit, quia ſcilicet aequatio pro illo ad quadraticam deprimitur.

50. Equidem nulla notio ſubeſt diuiſioni arcus 0 in partes. Tamen quia chorda $= 0$ aeque huic arcui reſpondet ac peripheriae integrae, dubitari poſſet, annon forte quod deducitur ex hypotheſi chordae $= 0$, contineat etiam aliquid pertinens ad chordas quae ſpectant ad arcus ſeriei X vel XII poſito $w = 0$. Iam facta hac ſuppoſitione, oritur

XX. 0, 2Z, - - - - (n — 1) Z ex X. et
XXI. Z, 3Z, - - - - (n — 2) Z ex XII.

et chordae arcuum XXI eaedem ſunt cum chordis XX ordine retrogrado ſumtis, demto primo XX (14) arcus, autem XX, demto primo, ſunt arcus XVIIII, quorum chordae eaedem ſunt cum chordis XVIIII addita in XVIIII chorda 0 (42). Ergo ſuppoſitio $w = 0$ eas quidem chordas negatiuas reddit quas $w = P$ poſitiuas exhibebat, ſed hoc ipſo nihil mutat, quia negatiuae et poſitiuae ſolo ſigno differunt, quantitate ceterum eaedem ſunt.

51. Pro ſectione in partes numero pari, facto $w = P$ prodeunt.

XXII. Z, 3Z, - - - - (n — 1) Z ex XIIII
XXIII. 2Z, 4Z, - - - nZ ex XVI

chordae

(*) KEPLER. l. c. (**) IO. BERN. Op. T. I. n. 69. p. 387.

chordae XXIII non reperiuntur in XXII. (30)
Omisso vltimo termino ex XXIII fiat

XXIIII. $2Z, 4Z, \cdots\cdots (n-2)Z$

52. Efficiunt vero primus et vltimus XXII additi peripheriam, habentque chordam eamdem. Idem valet de duobus quibusuis, huius seriei ab extremis aequidistantibus.

53. Idem valet de seriei XXIIII terminis ab extremis aequidistantibus.

54. Si sit $\frac{n}{2}$ par, ex terminis XXII, habentur paria $\frac{n}{4}$ (28. 52.) chordarum aequalium. Cum vero tunc sit $\frac{n-2}{4}$ impar qui numerus est terminorum XXIIII, haec series praebet paria $\frac{n-4}{4}$ chordarum aequalium, et praeterea vnam quae nullam sibi aequalem habet. Haec chorda spectat ad arcum XXIIII medium, hoc est, qui est in ordine $\frac{n-4}{4}+1$ seu $\frac{n}{4}$ tus adeoque habet $\frac{nZ}{2}$. Est igitur haec chorda peripheriae dimidiae, seu diameter.

55. Sit $\frac{n}{2}$ impar. Erit $\frac{n-2}{2}$ par, et seriei XXII dantur paria $\frac{n-2}{4}$ chordarum aequalium, et vna quae aequalem sibi non habet, pertinens ad terminum $\frac{n-2}{4}+1$ vel $\frac{n+2}{4}$ qui est $\left(1+\left(\frac{n+2}{4}-1\right).2\right)Z$ seu $\frac{nZ}{2}$, vt chorda illa rursus sit diameter. Series XXIIII, tunc praebet $\frac{n-2}{4}$ paria chordarum aequalium.

56. Aequatio pro peripheria in partes numero pari secanda, continere debet chordas XXII, XXIII, positiuas, et easdem negatiuas (40). Igitur ob chordam vltimam XXIII bis obuenientem diuisibilis est aequatio per X^2, et ita deprimitur ad gradum $2n-2$. Haec secunda aequatio paria habet $n-1$ radicum aequalium sed oppositarum. Inter ea vero est etiam par constans ex diametro positiue et negatiue accepta. Praeterea inter radices eiusdem signi sunt paria $\frac{n-2}{2}$ radicum aequalium (54. 55.) Conflatur ergo aequatio quam secundam dixi praeter hunc factorem $(X-2)(X+2) = X^2-4$ ex factoribus $X-a$, $X-a$, $X+a$, $X+a$, seu $X^4-2a^2X^2+a^4$, quos generatim vocabo L.

57. Exemplum. Quoniam chorda arcus dupli est $X\sqrt{(4-X^2)}$ dicta X chorda simpli, continuando duplicationem reperietur chorda arcus octupli $(2-X^2).X.$ Fig. 4.

$X \qquad \sqrt{(4}$

$\sqrt{(4 - X^2)}.\ \sqrt{(4 - 16\,X^2 + 20\,X^4 - 8\,X^6 + X^8)}$ quam expreſſionem vocabo ⊙. Illa ad rationalitatem reducta, prodit

$$\text{☾}) \quad 64\,X^2 - 336\,X^4 + 672\,X^6 - 660\,X^8 + 352\,X^{10} - 104\,X^{12} + 16\,X^{14} - X^{16}$$

et pro circulo in octo partes ſecando erit ☾ = o adeoque ſtatim diuiſibilis per X^2. Reliqui factores minori opera ex expreſſione ⊙ intelliguntur. In illa enim ad quadratum eleuata, multiplicationibus tamen non actu perfectis vt in ☾ factum eſt, patet contineri X^2, qua poſita = o euaneſcit quadratum ipſius ⊙. Hoc indicat chordam peripheriae quae aequationi bis ineſt. Deinde habetur $4 - X^2$ vbi $4 - X^2 = o$ dabit diametri AE duos valores oppoſitos. Porro $(2 - X^2)^2$ eſt caſus pertinens ad formulas quas L appellaui ſub finem §. 56. poſita enim $a = \sqrt{2} = AC =$ chordae $\frac{2}{8}$ P prodit hic factor. Conſequens eſt, vt reliquus quadrati ⊙ factor, octo dimenſionum, contineat duas formulas L, vnam pro qua a eſt latus octogoni AB, alteram pro qua eſt chorda $\frac{3}{8}$ P, = AD. Iam ſi a eſt latus octogoni $\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ (*) fit $L = X^4 - (4 - 2\sqrt{2})\,X^2 + 6 - 4\sqrt{2}$, et calculus docet per hoc L diuidi poſſe factorem octo dimenſionum, et prodire $X^4 - (4 + 2\sqrt{2})\,X^2 + 6 + 4\sqrt{2}$ pro L altero pro quo eſſe debet $2a^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ ſeu $a^2 = 2 + \sqrt{2}$ vnde fit $a^4 = 6 + 4\sqrt{2}$. Habetur ergo ſimul chorda $\frac{3}{8}P = \sqrt{(2 + \sqrt{2})}$

Fig. 4.

II. Sinus.

58. Generalis ſinus definitio haec eſt: Ad duo extrema arcus alicuius ductae ſint rectae ex centro, et ex altero extremo B (fig. 5.) in rectam ex centro ad alterum extremum, (productam ſi opus,) demiſſum perpendiculum BF, erit ſinus arcus cuiusuis, praefatas conditiones habentis.

59. Cum ergo earum quae ex centro ductae ſunt altera, per B non tranſiens, poſſit circulum duobus in punctis A, E, ſecare, arcus omnes, quibus communis eſt ſinus BF, communem habent terminum B, alter vero illorum terminus eſt vel A, vel E.

60. Creſcente arcu AB, notum eſt ſinum ſaltim creſcere vsque ad quadrantem, deinde rurſus decreſcere, et in E euaneſcere vbi $AB = \frac{1}{2}P$. Quodſi ergo arcus ab A per BQE vltra E continuetur, fiatque peripheria dimidia maior, ſinus renaſcitur negatiuus, eaque conditione creſcit et decreſcit denuo per ſemicirculum oppoſitum Eb q A quod ipſe ſinus b f ſitus indicat, qui ſpectat ad arcum $AQEb = AB + \frac{1}{2}P$. Ita qualibet dimidia peripheria addita ſinus tranſeunt per o in oppoſitum. Vnde dicto arcu $AB = u$, poſitiuus ſinus BF ſpectat ad hanc arcuum ſeriem

$$\text{I.}\quad u,\ u + P,\ u + 2P,\ \cdots\ u + kP,$$

negatiuus autem ad hanc

$$\text{II.}\quad u + \tfrac{1}{2}P,\ u + \tfrac{3}{2}P,\ \cdots\ u + \frac{2k-1}{2}P$$

Praeter-

(*) WOLF; Analyſ. §. 272.

Praeterea cum BF ſit etiam ſinus arcus $BQE = \frac{1}{2}P - u$ erit poſitiuus ſinus BF, arcuum

III. $\frac{1}{2}P - u,\ \frac{3}{2}P - u,\ \text{- - - - -}\ \frac{2k-1}{2}P - u$

negatiuus vero arcuum

IIII. $P - u,\ 2P - u,\ \text{- - - -}\ (k+1)P - u$

61. Quaerere ſinum qui ſpectet ad arcum $\frac{1}{n}$ arcus cuius ſinus eſt + BF, eſt quaerere tot ſinus diuerſos, quot pertinent ad arcus I, III, diuiſos ſingulos per n.

62. Hos arcus diuiſos ipſos in ſeriebus ſuis exhibere opus non eſt, cum ſatis iam intelligantur ex iis quae de chordis dicta ſunt, et ad ſequentia opus illis non ſim habiturus.

63. Poſſet enim ad imitationem tractationis de chordis, demonſtratio de ſinibus condi, ſed tum breuitati conſuletur, tum chordarum et ſinuum nexus melius ante oculos ponetur, rem ita conſiderando:

64. Dicatur $M = A\ \text{ſin}\ b$ ea multiplicitate vt M repraeſentet ſingulos arcus quibus reſpondet ſinus b poſitiuus; u vero ſit arcuum ſemicirculo minorum ad quos idem ſinus pertinet alteruter. Arcus quilibet pertinens ad chordam poſitiuam 2 b, dicatur N, erit $N = 2M$ ſumendo arcus ſibi reſpondentes. Scilicet, continentur M duplici formula, prima $u + kP$ (60) quae dat ipſorum N formulam $2u + 2kP$ (5) altera $(\frac{2k-1}{2})P - u$ (60) pro quibus $N = (2k-1)P - 2u$ (6) vt certum ſit arcus alicuius chorda exſiſtente poſitiua, poſitiuum etiam eſſe ſinum dimidii et contra.

65. Quaerere ſinuum ope $\frac{1}{n}$ A ſin b, hoc eſt quaerere ſinus arcuum $\frac{M}{n}$, idem eſt, ac quaerere chordas dimidias arcuum $\frac{2M}{n}$ ſeu $\frac{N}{n}$.

66. Pro n impari Arcuum $\frac{N}{n}$ chordae poſitiuae ſunt numero $\frac{n+1}{2}$, negatiuae $\frac{n-1}{2}$ (22) Illarum ergo dimidia praebent arcuum $\frac{M}{n}$ ſinus poſitiuos $\frac{n+1}{2}$, negatiuos $\frac{n-1}{2}$.

67. Exemplum. Si c ſit chorda arcus ſimpli, C quintupli eſt $C = 5c - 5c^3 + c^5$ (IO. BERN. Op. T. I. n. 69. vel HAUSEN El. Math. p. 182.) Si X ſit ſinus arcus ſimpli, b quintupli, eſt $b = 5X - 20X^3 + 16X^5$ (Wolf Analyſ. §. 325). Iam fac $X =$

$X = \frac{1}{2} c$ prodit $\frac{5c}{2} - \frac{20.c^3}{8} + \frac{16\,c^5}{32}$ vel $\frac{5c}{2} - \frac{5c^3}{2} + \frac{c^5}{2} = \frac{1}{2} C$. Patet ergo ſumto vt ſumi licet $b = \frac{1}{2} C$, radicem quamcunque aequationis inter chordas, dimidio eius ſumto dare radicem aequationis inter ſinus. Vnde poſitiua c dant poſitiua X negatiua illorum, negatiua horum. Vt clarius pateat quid ſibi velit, arcuum $\frac{N}{n}$ chordas dimidias eſſe ſinus arcuum $\frac{M}{n}$, ſumamus $n = 5$, et $N = 300$ et $\frac{N}{n}$ dabunt ſeries

60, 204, 348 ex X (10)
132, 276 ex XII (10)

& chordae quidem ſuperiorum trium arcuum erunt poſitiuae, inferiorum duorum negatiuae. Eſt ergo $M = 150$ et captis dimidiis arcuum $\frac{N}{n}$ vt oriantur

30, 102, 174
66, 138

aio ſinus prodituros poſitiuos arcuum 30, 102, 174, negatiuos Arcuum 66, 138, ſi quaeratur quinque ſectio arcus cuius ſinus eſt $= \frac{1}{2}$ quoniam $\frac{1}{2} = \sin 150^\circ$

68. Similiter ex (39) patet, ſi n ſit par, arcuum M dari ſinus poſitiuos n, et totidem negatiuos prioribus oppoſitos.

69. Ex. ſi x, y, ſint ſinus et coſinus arcus ſimpli, b octupli eſt $b = y.\ (8\,x\,y^6 - 56\,x^3\,y^4 + 56\,x^5\,y^2 - 8\,x^7)$ quae aequatio ab irrationalitate liberata adſcendit ad gradum 16 ob $y = \sqrt{(1 - x^2)}$. Vt vero intelligatur eius relatio ad aequationem inter chordas eorumdem arcuum; ſit arcus ſimpli chorda $= c$, chorda ſupplementi eius $= d$, octupli chorda $= C$. Scribatur $\frac{1}{2} c$ loco x erit $y = \sqrt{(4 - c^2)} : 2 = \frac{1}{2} d$ et reperietur $b = \frac{1}{2} dc.\ (4 - 10\,c^2 + 6\,c^4 - c^6)$. Chorda vero arcus dupli erit c d, et quadrupli $c\,d\,\sqrt{(4 - c^2\,d^2)}$ et octupli $c\,d.\ \sqrt{(4 - c^2\,d^2)}\ (2 - c^2\,d^2)$ quae reducitur ad $c\,d.\ (4 - 10\,c^2 + 6\,c^4 - c^6)$ duplum ſinus b. Rurſus ergo patet, cuiusuis radicis aequationis inter chordas dimidium, eſſe radicem aequationis inter ſinus, vt data aequatione inter chordas, habeatur aequatio inter ſinus ſcribendo 2 b loco C, et 2 x loco c.

70. De coſinibus breuiter haec monenda ſunt: Pro n impari aequatio inter b et x continet x non niſi graduum imparium, vsque ad n; (66. 42.) hoc eſt pars eius x continens reſolui poteſt, in ſeriem potentiarum parium ipſius x, cuius ſumma in x potentiae primae ducitur; ſed ob $x = \sqrt{(1 - y^2)}$ eliminato x, ſeries illa fit potentiarum parium ipſius y ducenda in $\sqrt{(1 - y^2)}$. Quodſi ergo irrationalitas tolli debeat, quadrando, perſpicuum eſt aequationem inter b et y continere potentias ipſius y pares vsque ad 2 n, adeoque definire duo y pro quolibet x, ſed aequalia et oppoſita, vt decet, quoniam coſinus per ſingulos quadrantes in oppoſitos mutantur, ſinus ſaltim per ſingulas peripherias dimidias. Pro n pari, aequatio inter b et x continet

gradus

gradus pares ipſius x ad 2n, (68) hoc eſt gradus omnes ipſius x^2 ſeu $(1 - y^2)$ ad 2n. Vnde rurſus aequatio inter b et y dat y numero 2n ſed dimidio numero aequalium et oppoſitorum reliquo dimidio, quia non niſi parium dimenſionum y ineſt. Hoc caſu aequatio inter b et y tot definit y quot x definit illa inter b et x, quoniam illa inter b et x pro quouis arcu duos ſinus poſitiuum et negatiuum definit.

71. Ex. Formula §. 67. adducta ſic exprimi poteſt $b = (5 - 20.(1 - y^2) + 16.(1 - y^2)^2).\sqrt{(1 - y^2)}$ ex qua patet naſci aequationem gradus 6 inter b et y.

72. Cum talis aequatio inter b et y quadrando naſcatur, ſiniſtra eius pars erit bb hoc eſt 1 — aa dicto a coſinu arcus ſinus b; Vnde ſimul patet aequationem inter coſinus anguli ſimpli et multipli easdem leges ſequi quae §. 70. oſtenſae ſunt, niſi quod accedat quadratum radii.

III. Tangentes.

73. Tangens AG Fig. 5. ſpectat ad arcum ADB, et ad arcus omnes ita terminatos punctis A, B, vt ſecans per B tranſeat, tangens ipſa radio ad A ducto perpendiculariter inſiſtat. Obſeruandum vero eſt licet magnitudine eadem tangens reſpondeat arcubus ADB, BQE, pro vltimo tamen eſſe negatiuam. Quod intelligitur tum inde quia tangens vbi vsque ad angulum rectum creuit, tranſeundo per infinitum, non poteſt redire niſi negatiua, tum quia tangens eſt quarta proportionalis ad coſinum, ſinum, et radium, arcus vero quadrante maioris ABΓ coſinus Cf ſit negatiuus. Porro vbi ABQ creſcit vsque ad ſemicirculum ABQE, decreſcit tangens negatiua EK et euaneſcit in E, renaſcitura in arcu Eb poſitiua; ſcilicet arcus ABEb non coſinus modo Cf ſed et ſinus bf negatiuus eſt (60) vt EH quarta proportionalis ad eos et radium, ſit poſitiua. Cum arcus AQEb tres quadrantes explet, infiniteſcit rurſus tangens et negatiua redit per arcum quarti quadrantis, cuius ſinus γF, adhuc negatiuus eſt, coſinus CF poſitiuus (70). Ita patet, ſub finem cuiusuis quadrantis tangentem tranſire in oppoſitum, vt cum tangente dati arcus, magnitudine et ſigno eadem ſit, tangens arcus eiusdem, peripheria dimidia aucti. Cum ergo dicto arcu ADB = u, tangens poſitiua eadem reſpondeat, tum illi, tum arcubus omnibus peripheria dimidia ad illum addita prodeuntibus, continebuntur arcus omnes tangentis datae poſitiuae hac ſerie.

$$\text{I. } u,\ u + \tfrac{1}{2}P,\ u + P,\ \text{----}\ u + \frac{kP}{2}$$

Tangentis vero AG negatiuam habens, arcus minimus eſt BQE = $\frac{1}{2}$P — u, et eiusdem ſigni habent arcus omnes qui dimidia peripheria aliquoties ad BQE addita prodeunt, contenti hac ſerie

$$\text{II. } \tfrac{1}{2}P - u,\ P - u,\ \tfrac{3}{2}P - u\ \text{----}\ \frac{(k+1)P}{2} - u$$

74. Di-

74. Diuiſis ſingulis ſerierum I, II, terminis per n, orientur ſeries quas vocabo III, IIII, et credo ab eo qui praecedentia legit, ſatis intellectas iri, licet oculis eius non ſubiiciantur. Serierum III, IIII, partes priores ſcribantur, eae, in quibus ſemiperipheria non ducta eſt in numerum ipſo n maiorem. Dicatur vero $\frac{1}{2}$ P = H fiet

$$\text{V. } \frac{u}{n}, \quad \frac{u+H}{n} \text{ ---- } \frac{u+(n-1)H.}{n} \text{ ex III.}$$

$$\text{VI. } \frac{H-u}{n}, \quad \frac{2H-u}{n} \text{ ---- } \frac{nH-u}{n} \text{ ex IIII}$$

75. Cuiusuis harum ſerierum termini ſunt n, et quaelibet hac lege terminata eſt, vt vltimus eius terminus primum peripheria dimidia non excedat.

76. Cuius ſigni eſt tangens $\frac{u}{n}$, eiusdem ſunt tangentes arcuum ſeriei V, quam diu ipſum $\frac{u}{n}$ non excedunt quantitate $\frac{1}{2}$ H (72) Ergo poſito n pare, in ſerie V, arcus cuius numerator eſt u + g H habebit tangentem poſitiuam, vt habet arcus primus, ſi $\frac{u+gH}{n} - \frac{u}{n}$ minus eſt quam $\frac{H}{2}$ ſeu g minus quam $\frac{1}{2}$ n. Quodſi g = $\frac{1}{2}$ n et u = o erit arcus ille quadrans et tangens eius infinita, ſi vero u eſt aliquid, ſed minus quam $\frac{1}{2}$ H, arcus ille habebit tangentem negatiuam, vsque ad finem ſeriei V.

77. Sit g = $\frac{1}{2}$ n + q, eſt $\frac{u+gH}{n} = \frac{u+qH}{n} + \frac{H}{2}$ qui arcus ab H ſubductus relinquit $\frac{1}{2}$ H − $\frac{u+qH}{n}$, complementum arcus $\frac{u+qH}{n}$ qui totus eſt a primo ſeriei quotus eſt $\frac{u+qH}{n} + \frac{H}{2}$ ab $\frac{1}{2}$ n to, computando ſemper ab initio verſus finem. Tangens igitur arcus $\frac{u+qH}{n} + \frac{1}{2}$ H eſt cotangens arcus $\frac{u+qH}{n}$ negatiue ſumta. Vnde tangentes partis dimidiae poſterioris arcuum ſeriei V, ſunt cotangentes partis dimidiae prioris ſed negatiue ſumtae.

78. Terminus generalis ſeriei III, eſt $\frac{u+kH.}{n}$ Dicto vt ante k = f n + g fit ille $\frac{u+gH}{n} + fH = S$, tangentis eiusdem cum $\frac{u+gH}{n}$, aliquo ſeriei V. (76). Igi-

(76) Igitur tangentes arcuum S diuerſae ſunt numero n, poſitiuae quidem $\frac{n}{2}$, et totidem, priorum cotangentes negatiue ſumtae.

79. Seriei VI. vltimus, additus primo V efficit H et habet adeo tangentem, tangenti primi H oppoſitam ceterum aequalem. Idem valet de penultimo VI et ſecundo V, de antepenultimo VI et tertio V, ſeu generatim de terminis duobus qui aequaliter diſtant alter a ſerie VI fine alter a ſeriei V initio. Tangentes igitur arcuum VI ſunt arcuum V tangentibus oppoſitae.

80. Seriei IIII (74) generalis terminus $\frac{(k+1)\ H - u}{n}$ poſito $k + 1 = f\,n + g$ reducitur ad $f\,H + \frac{g\,H - u}{n} = T$, habentem tangentem magnitudine et ſigno eamdem cum tangente arcus $\frac{g\,H - u}{n}$ obuenientis in ſerie VI. Arcus autem $\frac{g\,H - u}{n}$ tangens, ſi g minus quam $\frac{1}{2}$ n eſt tangenti arcus alicuius ex $\frac{n}{2}$ vltimis ſeriei V oppoſita (79) hoc eſt oppoſita arcus alicuius ex primis $\frac{n}{2}$ ſeriei V cotangenti negatiue ſumtae (78), hoc eſt arcus alicuius ex primis ſeriei V cotangenti ipſae; ſi $g = \frac{1}{2}$ n tangens arcus ſer. V eſt cotangens primi ſeriei V; ſi autem g minus $\frac{1}{2}$ n, tangens arcus ſer. VI, eſt oppoſita tangentis arcus alicuius ex primis ſer. V.

81. Series igitur V et VI, nullam varietatem continent, niſi tangentes et cotangentes arcuum primorum $\frac{n}{2}$ ſer. V, poſitiue et negatiue acceptas.

82. Ex. ſit $u = 24^\circ$, $n = 8$ erit

V. 3, $25\frac{1}{2}$, 48, $70\frac{1}{2}$, 93, $115\frac{1}{2}$, 138, $160\frac{1}{2}$.

VI. $19\frac{1}{2}$, 42, $64\frac{1}{2}$, 87, $109\frac{1}{2}$, 132, $154\frac{1}{2}$, 177.

Hic primo patet dimidium poſterius ſer. V. conſtare ex arcubus qui ſunt $90^\circ +$ arcu aliquo in dimidio priore contento; v. g. $138 = 90^\circ + 48^\circ$; horum ergo arcuum tangentes negatiuae ſunt, cetera eaedem cum cotangentibus arcuum priorum. Sic tang. $138 = -$ tang. $(180^\circ - 138^\circ) = -$ tang $42^\circ = -$ cotang 48°.

Deinde arcus VI computati a fine ſeriei verſus initium, ſemicirculum explent cum arcubus V, computatis ab initio verſus finem ita $132 + 48 = 180$. Ergo tang $132 = -$ tang 48; Item $42 + 138 = 180$. Ergo tang $42 = -$ tang $138 = -(-$ cot. 48$) = +$ cot 48.

83. Si ſit n impar, manent ſeries V, VI, (74) quaelibet verò iam conſtat, ex terminis *praecedentibus* $\frac{n-1}{2}$, *medio* $n + 1$ to et hunc *ſequentibus* aliis $\frac{n-1}{2}$

Medius

Medius erit $\frac{u + (n-1).\ \frac{1}{2} H}{n}$ arcum $\frac{u}{n}$ nondum excedens quadrante: Sequentium quiuis erit $u + \frac{(\frac{n+1}{2} + q - 1)}{n} H = \frac{u + (q-1)\ H}{n} + \frac{n+1}{n}.\ \frac{1}{2} H$ excedens vt patet, aliquem terminorum praecedentium quantitate $\frac{n+1}{n}.\ \frac{1}{2} H$, quae quadrante maior eſt, ſemicirculo minor. Hi igitur arcus poſteriores, tangentes habent negatiuas, neutiquam tamen cotangentibus praecedentium oppoſitas, ſed oppoſitas tangentibus priorum $\frac{n-1}{2}$ ſeriei VI. (79).

84. Eo itaque plurimum caſus n paris et imparis differunt, quod in priore dimidius numerus eorum quae reperiuntur, efficiatur a cotangentibus, in altero cotangentes nullae adſint.

85. *Ex.* Sit $u = 27°$, $n = 9$ eſt

V. 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163.
VI. 17, 37, 57, 77, 97, 117, 137, 157, 177.

vbi nullius arcus ſeriei V tangens poteſt eſſe cotangens poſitiua vel negatiua arcus alicuius ex eadem ſerie, quia nullus alium quadrante excedit; v. g. $163 - 90 = 73$ qui arcus nullibi in V obuenit. Sunt igitur tangentes 9 arcuum V omnes inter ſe diuerſae, et priores quidem 5 poſitiuae, quatuor praecedentium arcuum, cum ea medii, ſequentium 4 negatiuae, ſingulae 9 ceterum oppoſitae tangentibus ſingulis 9 ſeriei VI retrogrado ordine acceptae.

86. Sit X tangens arcus ſimpli, Z cotangens, Y tangens multipli, et pro caſu n paris, aequatio inter Y et X ita debet eſſe comparata, vt radices eius poſitiuae numero n praebeant tangentes totidem arcuum primorum ſer. V; negatiuae eodem numero eorumdem arcuum cotangentes. Quare, ſi tangentium illarum aliqua ſit $= e$ cui reſpondent cotangens $\frac{1}{e}$ aequatio habebit factores $X - e = 0$, $X + \frac{1}{e} = 0$ ſingulos numero $\frac{n}{2}$ aut conflata ex iis paria totidem factorum quadraticorum $X^2 + \frac{1 - e^2}{e} X - 1 = 0$.

87. Praeterea manifeſtum eſt, aequationem ita debere eſſe comparatam, vt ſcripto $-Z$ in locum $+X$ abeat $+Y$ in $-Y$, ſeu vt inter $-Y$ et $-Z$ eadem ſit aequatio quae eſt inter $+Y$ et $+X$. Nam in aequatione inter X et Y, poſitiua X ſignificant tangentes, arcuum primorum $\frac{n}{2}$ ſeriei V, negatiua illorum cotangentes negatiue ſumtas;

ſumtas; in aequatione vero inter X et — Y, poſitiua X ſignificant tangentes arcuum primorum ſer. VI, hoc eſt cotangentes primorum ſer. V; negatiua vero cotangentes arcuum primorum ſer. VI, hoc eſt tangentes primorum ſer. V. (80.) Quod igitur X in aequatione inter X et Y poſitiuum eſt, idem negatiuum eſt in aequatione inter X et — Y. Vnde patet adſertum.

88. Etiam pro n impari, aequatio inter X et Y ita debet eſſe comparata, vt ſcripto — X pro X abeat + Y in — Y. Nam quae radix poſitiua prioris aequationis, tangentem poſitiuam indicat, eadem negatiua ineſt poſteriori, et indicat ibi tangentem negatiuam, et contra. (83)

89. Hinc intelligitur quomodo paris et imparis n caſus complecti queat vnica formula IO. BERNOVLLII Op. T. I. n. 89. pag. 114. in qua ſi $A = n$, $B = \frac{n.(n-1)}{1.2.}$, $C = \frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3.}$ cet. vt A, B, C, cet. ſint coefficientes formulae binomialis, erit

$$Y = \frac{AX - CX^3 + EX^5 - GX^7 \text{ ---}}{1 - BX^2 + DX^4 - FX^6}$$

quae formula ſcripto — X in locum + X abit in

$$\frac{-AX + CX^3 - EX^5 + GX^7}{1 - BX^2 + DX^4 - FX^6} = -Y$$

vnde ſi n eſt par, X poteſt ſignificare tangentes et cotangentes, (87) ſi impar tangentes ſolas (88). Quod reuera ſignificet, examine accuratiore analyſeos Bernoullianae oſtenditur, quod huius loci non eſt.

90. Ex. I. Quaeratur triſectio; cuius formula eſt $Y = \frac{3X - X^3}{1 - 3X^2}$. Sit autem quadrans triſecandus: Erit $u = 90^\circ$ et

V. 30°, 90°, 150°
VI. 30, 90, 150°

et $Y = \infty$. Quod contingit *primo ſi* $X = \infty$ ſeu tangens arcus 90 *deinde* ſi $3X2 = 1$ vel $X = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, eſt vero $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ tangens 30° et $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ tangens 150° = tangenti 30 negatiuae. Nulla igitur hic cotangens obuenit, et tangentes VI oppoſitae ſunt tangentibus V, ordine retrogrado ſumtis, formula vero, ſcripto — X loco X dat — Y.

91. Ex. 2. Pro diuiſione in partes 6; eſt

$$X^6 + \frac{6X^5}{Y} - 15X^4 - \frac{20X^3}{Y} + 15X^2 + \frac{6X}{Y} - 1 = 0$$

Hanc aequationem primo patet ſubſiſtere, ipſorum X et Y ſignis in contraria mutatis. Deinde reſoluta illa ſerierum ope *), vt ſcilicet quaeratur X per ſeriem ſecundum ipſius Y potentias progredientem, reperientur tales ſeries *adſcendentes*, hoc eſt in quibus ipſius Y potentiae creſcunt, ſex.

$$
\begin{aligned}
1)\ X &= +\tfrac{1}{6}\,Y + \beta\,Y^3 + \gamma\,Y^5 \text{ - - -}\\
2) &= +\sqrt{3} + \delta\,Y + \varepsilon\,Y^2 \text{ - - -}\\
3) &= -\sqrt{3} + \zeta\,Y + \eta\,Y^2 \text{ - - -}\\
4) &= +\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \vartheta\,Y + \iota\,Y^2 \text{ - - -}\\
5) &= -\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \varkappa\,Y + \lambda\,Y^2 \text{ - - -}\\
6) &= -\frac{6}{Y} + \mu\,Y + \nu\,Y^3 \text{ - - -}
\end{aligned}
$$

Iam quaeratur ſectio peripheriae integrae, vbi Y = o et licet ponere u = o, cum ex ante dictis appareat idem reperiri ſiue u = o ſiue u = P ponatur, cum tangens a qua res omnis pendet vtrique arcui eadem ſit (conf. 50.) Poſito ergo u = o fit

V. 0, 30, 60, 90, 120, 150,
VI. 30, 60, 90, 120, 150, 180,

Valor ipſius X 1) hic eſt = o = tang o = — cot 90° 2) = tang 60 = — tang 120, 3) = tang 120 = — cot 30, 4) = tang 30, 5) = — cot 60, 6) = ∞ = tang 90. Si ponatur u = P; fit

V. —60, 90, 120, 150, 180, 210
VI. 30, 0, 30, 60, 90, 120

et poſito Y = o; fiunt valores ipſius X, 1) o = tang 180° in V; = tang o in W, 2) $+\sqrt{3}$ = tang 60° in V et VI; 3) $-\sqrt{3}$ = tang 120° in V et VI; 4) $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ = tang 210 in V; tang 30 in VI; 5) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ = tang 150 in V; tang — 30 in VI; 6) ∞ = tang 90 in V et VI.

Arcus negatiui tangentem eſſe negatiuam arcus aequalis ſed oppoſiti patet, nam ſi in fig. 5; Sint arcus AB, Aγ aequales, ſed oppoſiti erunt illorum tangentes AG, AL; aequales ſed oppoſitae.

Quoniam arcus quadrante minoris tangens eſt poſitiua, quadrante maioris negatiua, ſequitur vt infinitum per quod tranſit tangens prioris in tangentem poſterioris ſimul haberi poſſit pro poſitiuo et negatiuo, quod et colligitur ex illis quae dixi in diſſ. de translatis geometrarum.

IIII.

(*) Id variis modis fieri poteſt. Ego hic parallelogrammo Newtoniano vſus ſum, cuius theoriam rigidioribus quam ab aliis datae mihi innotuerunt demonſtrationibus firmatam exhibui in diſſertatione Lipſ. 1742 edita: *Aequationum ſpecioſarum reſolutio Newtoniana per ſeries.*

IIII. Secantes.

92. Secans arcus ſimpli dicatur q, multipli Q, eſt $q = \sqrt{(1+X^2)}$, $Q = \sqrt{(1+Y^2)}$ (86) et ſubſtitutis in aequationem inter X et Y, tangentium loco valoribus illarum $\sqrt{(1-qq)}$, $\sqrt{(1-QQ)}$, oritur aequatio quae ad rationalitatem reducta continebit ſecantium potentias non niſi pares, ipſius q vero poteſtatem 2n; adeoque datae Q reſpondent ipſarum q aequalium ſed oppoſitarum paria n. Scilicet ſecans datae tangenti reſpondens, ob radicem qua exprimitur, accipi poteſt poſitiua vel negatiua; cum tangentes EI, AG (fig. 5) aeque poſitiuae ſint (73), ſecans vero prioris CG, ſecanti poſterioris CI oppoſita. Vnde hae ſecantes 2n non dant niſi n arcus diuerſos.

V. Arcus ipſe.

93. Haec de lineis, arcuum quidem, vel angulorum determinatricibus, adſcititiis tamen. Dubitari adhuc poterat, cuius gradus ſit problema ſectionis angularis, ſi poſſet abſque adſumtis eiusmodi lineis, operatione quadam ad arcum ipſum immediate directa, perfici; Analyticis enim calculis ſecamus non arcum u, ſed arcum chordae, ſinus, tangentis, eius quam habet arcus u. Videri igitur poterat quaeſtionem hanc analytice explicatam, generaliorem eſſe illa de arcu ipſo ſecando, hancque forte reſponſa pauciora vel vnicum eſſe habituram. In eoque errore, fateor me olim verſatum fuiſſe, cum quae ante adduxi probe cognita haberem, illumque mathematicis egregiis propoſuiſſe, ſed hi ad aequationes algebraicas me ablegarunt, hoc eſt principium petierunt. Videbam ſectionem in partes binarii potentia numerabiles, problema planum eſſe, repetita biſſectione a geometriae tirone ſoluendum, cum in analyſi ad aequationes ducat gradus pares omnes percurrentes, et quarum reſolutio, vt eius §. 57. analyſtae quem geneſis illarum latet negotium ſit faceſſitura. Minus tuto igitur a difficultate, hoc eſt a multiplicitate ſolutionum analyticarum, ad ſimilem conditionem geometricarum conſtructionum concludi videbatur. Sed re accuratius penſitata, ipſaque geometria in conſilium vocata, vidi, etiam de arcu ipſo ſecando quaeſtionem, tot reſponſa admittere, quot partes fieri debent. Sumo autem arcus eosdem cenſeri, qui vel multiplo peripheriae differunt, vel peripheriam additi conſtituunt. Prius congruit praxi aſtronomorum, circulos integros ex numero plures continente, reiicientium; pendet vero aeque ac alterum ab eo, quod arcus qui pro iisdem ſumuntur, eosdem terminos habeant. Ita B, A, (fig. 1.) ſunt termini arcus ADB, ſimpli aut peripheriis quotcunque aucti, ſed eadem puncta ſunt etiam arcus AEB et additione peripheriae ex eo natorum termini: Iidem ergo cum arcu ADB = u cenſentur

I. $u, u+P, u+2P, \cdots u+kP$

et iidem cum arcu AEB,

II. $P-u, 2P-u \cdots (k+1)P-u$

Iam diuiſione arcus u aut cuiusuis ei aequipollentis, oritur aliquis contentus generali formula $\frac{u + kP}{n}$ qui poſito $k = fn + g$ reducitur ad $\frac{u + gP}{n} + fP$, hoc eſt ad arcum aequipollentem alicui ex ſerie quae prodit in locum g ſcribendo integros omnes inde ab 1 ad $n - 1$, et continet terminos $n - 1$, ad quos accedit $\frac{u}{n}$ Haec igitur diuiſio exhibet arcus diuerſos n. Similiter ex diuiſione ſeriei II, naſcuntur arcus $\frac{gP - u}{n} + fP$ poſito $k + 1 = fn + g$; aequipollentes arcubus $\frac{gP - u}{n}$, poteſt vero hic maximus ipſius g valor eſſe $= n$, arcu adhuc peripheria minore manente. Igitur diuiſione hac diuerſorum arcuum duae naſcuntur ſeries

III. $\frac{u}{n}, \frac{u + P}{n}, \cdots \frac{u + (n - 1)P}{n}$

IIII. $\frac{P - u}{n}, \frac{2P - u}{n}, \cdots \frac{nP - u}{n}$

Arcus cuiusuis ſeriei numero n ſunt diuerſi inter ſe, et ab arcubus reliquae ſeriei; ſed ſeriei IIII; arcus, ordine retrogrado arcubus ſeriei III additi, vt primus IIII vltimo III; cet. peripheriam conſtituant, adeoque quilibet tales duo arcus, cum eosdem terminos habeant, iidem cenſentur.

Sint tales duo arcus; ſeriei III; r tus ab initio $= \frac{u + (r - 1)P}{n}$ ſeriei IIII; r tus a fine $= \frac{(n - r + 1)P - u}{n}$; hi additi efficiunt P; habentque adeo communes terminos vt arcus ADB, AEB, fig. 1. itaque hanc ob cauſſam pro iisdem habentur.

Praeterea dato horum arcuum, peripheria minorum, vno, datur vtique alter, eius ſupplementum ad peripheriam; Vt, ſi w ſignificet indefinite quemlibet arcum ſeriei III; ſignificet $2R - w$ indefinite quemlibet ſeriei IIII, itaque datis w numero n, ſimul dantur totidem $2R - w$.

Rurſus ergo ex coniunctis his duabus ſeriebus, non plures arcus quam n eliciuntur, qui pro diuerſis poſſint haberi.

94. Ipſam vero geometricam conſtructionem eiusmodi multiplicitatem exhibere, ſi in omni ſuo ambitu conſideretur, facili exemplo, biſſectionis illuſtrare liceat. Fig. 6 Quaecunque fiunt ad arcum BDC f. 6. vel angulum BAC cuius menſura eſt biſſecandum, eadem etiam fieri poſſunt ad biſſecandos arcus quoscunque terminos B, C, habentes, aut angulos cruribus BA, CA, quomodocunque definitos. Igitur patet ipſam rectam DA quae BDC biſſecat, biſſecare etiam productam in G, arcum CGB,

CGB, et parte ſui AD efficere arcus ſeriei III, parte AG arcus ſeriei IIII, ad hunc caſum translatarum. Angulus vero BAC exſiſtere non poteſt, niſi ſimul ſint contiguus eius CAE, amborumque verticales et alii innumeri, cruribus iisdem contenti, ſiue intra eam partem qua conniuent crura ſiti, ſiue exteriores v. g. angulus qui ſupereſt acuto CAB ex quatuor rectis ſublato, quem aliter quam CAB appellare non poſſumus, *gibbi* tamen vocabulo addito. Hi autem anguli omnes biſſecantur a rectis duabus DG, FI in vertice A ad angulum rectum ſe decuſſantibus, FI vero intra angulum CAE eadem lege ducitur qua DG intra CAD. Hinc geometrica conſtructio anguli biſſecandi, reuera etiam duplex eſt: Qui ſimplicem tantum videt, hoc eſt, qui angulum EAC non videt, oculis ad ſolum CAB defixis, non omnia quae diagramma menti offert cernit, plane vt qui conum torno forte elaboratum contemplatur, et hyperbolam ex eo ſectam, integra crederet, quae dimidia habet ante oculos, de parte coni ad verticem oppoſita, et hyperbolae dimidio illa contento non cogitans. Geometrae vero oculi, non corporis ſunt, ſed mentis, vnoque obtutu, quantum idea continet complectuntur, non quantum ſenſibus offertur: Igitur rectam quae conice monetur, ad verticis vtramque partem, in infinitum vident productam, et planum hyperbolae partes oppoſitas ſecans, quaquauerſum extenſum; in noſtro vero caſu angulos omnes vident qui rectis CA, AB, vltra A etiam productis continentur. Geometriae nihil ineſſe pronunciat D. de DE BVFFON quod non ipſi illi immiſerimus (*). Sed hoc ipſum, quod indidimus ideis noſtris, debita attentione non adhibita, oculos interdum fugere poteſt. Calculus algebraicus, radicum imprimis diuerſitate, eius rei nos admonet; eſt autem calculis omnibus cum machinis id commune, vt labore ſingula quae agimus perpetuo ante oculos habendi, nos leuent, vt calculum vel machinam certis legibus tractantes, vel eorum inſcii quae durante operatione fiunt, id tamen quod deſideratur obtineant. DIDEROTVS, aegre ferens quod ad aures chordis artificioſe pulſatis demulcendas, digitos fere ab infantia exercitatos habere neceſſe ſit, machinam excogitauit, qua idem praeſtare poſſit vel ignarus muſices, manubrio axis cuiusdam verſato: Qui hac machina, neſcius conſtructionis eius vteretur, muſici elogio omnino non eſſet ornandus; credo muſicos, vt ſunt poetae, et pictores, et omnes fere ingenioſi voluptatum artifices, paulo cerebroſiores, vix eum recepturos, qui machina probe intellecta luderet. Eiusmodi machinae cum calculo algebraico ſimilitudinem qui animaduertit, is minus mirabitur cur Angli elegantius reputent ſynthеſi aut analyſi geometrica vti quam illo; idem etiam algebraicos qui ſibi non contemnendi videntur agnoſcet, perſimiles Allobrogibus illis, qui per Germaniae ciuitates vbi maior hominum confluxus eſt curſitant, et ad laternae magicae miracula aut muris alpini ſaltus, ſpectatores machinae talis, vnde DIDEROTVS ſuae ideam ſumſiſſe fatetur vlulatu inuitant. Quales imprimis illi euadunt, qui elementis

(*) *Hiſtoire naturelle*; *T. I. diſc.* 1. *ſur la maniere de traiter l'hiſtoire naturelle.*

Geometriae obiter ex recentioris cuiusdam ſcriptoris compendiolo perceptis, neglecta antiquorum lectione, ad algebram quam vocant, graſſantur, hoc eſt calculos litterales vtcunque tractare diſcunt, ad analyſin autem ipſam, quae directrix eſt calculorum, non pertingunt, quoniam nec ingenium exercitio quodam ad illam formarunt, nec copias eruditionis geometricae quibus vtitur collegerunt, vulgi tamen oculos horrendis illis ſignis a + b — x faſcinant, prudentioribus, abecedarii mathematici, ſaepe iocum interdum et bilem mouent.

Ab horum grege vt nos ſeparemus, tenendum eſt, calculos eſſe ratiocinia ſignis expreſſa, oeconomia ſignorum effici, vt dum calculos ipſos ſubducimus, ſignaque ſecundum certas leges combinamus, ideas ipſas quarum ſunt ſigna, dimittere tantiſper ex animo poſſimus; ſed quae ſignorum ſub initium adſumtorum relatio ad ideas ſit, diligenter attendendum eſt, quo vltimum calculi enunciatum recte intelligatur. Ita fiet, vt ſi quid quaerere inſtituimus, currente calculo idem cum aliis exeat, multiplicem quaeſtionem, vel non cogitantes, inſtituiſſe nos perſpiciamus, facileque, quaeſtionibus diſtinctis, reſponſum cuiuis ſuum accommodemus. Interdum etiam non ipſa quaeſtio multiplex inſtituta eſt, ſed multiplicitas calculi legibus introducitur vt, ſi quod vnicum in ſe eſt, calculo quaeratur quadrati formationem poſtulante, tunc enim altera reſponſi pars nihil fere habebit cum quaeſtione inſtituta commune. Huius duo exempla citare poſſum, quae mihi obtigerunt, alterum in catoptrico quodam problemate pertinente, ad legem minimi reflexionibus a circulo factis applicandam (*) alterum in problemate crepuſculi minimi (**). Quibus exemplis et ſimilibus intelligitur algebram oracula edere, quae ambiguitate ſua incertam relinquere poſſint aut in errorem inducere plebem quaerentium, non deae ſacerdotes.

Edenda haec fuerunt ſub aditum noui muneris quo matheſin et phyſicam hic docere ab AVGVSTISSIMO REGE iuſſus ſum. Quam clementiam pie deuenerabor, ſimul legi regiae obtemperaturus, breuiter dicam *de iis quae ſtudium matheſeos facit ad virtutem*, proxima die Saturni, Iulii 31.

Optare vt non diſpliceat SERENISSIMIS HASSIAE PRINCIPIBVS ſplendoris eius quo hanc Muſarum ſedem illuſtrant partem hac die mihi impertiri, id iuſto audacioris forte eſt, venia tamen non plane indigni. Quis enim deſperet INDVLGENTISSIMOS PRINCIPES condonaturos deſiderio, quod a cultu quo DECORA ACADE-

(*) In optices abſoluto ſyſtemate quod ſecundum Cel. SMITH, anglicum, vernaculo ſermone edidi (*vollſtaendiger Lehrbegrif der Optik*) catoptr. analyt. C. I. Pr. I. ſchol. 5.

(**) In ſolutione analytica problematis quam inſerui geographiae generali Cl. LVLOFS cum germanica lingua illam ederem (*Einleitung zu der mathem. und phyſic. Kenntniſs der Erdkugel*) Lib. II. poſt. Cap. V.

ACADEMIAE venerari aequum eſt proficiſcitur, ipſaque execellentia boni etſi vltra ſpem et merita deſiderantis poſiti excuſatur. MAGNIFICVM ACADEMIAE PRORECTOREM ILLVSTRISSIMOS COMITES PROFESSORES AC PROCERES OMNIVM ORDINVM CELEBERRIMOS ET ILLVSTRES, GENEROSISSIMOS NOBILISSIMOSQVE COMMILITONES, vt fauoris ſui in me teſtimonium praeſentia ſua edere dignentur quam fieri poteſt humaniſſime rogo atque obſecro. Dab. Gottingae M. Iul. Anno Aerae Chriſt. CIↃ IↃ CCLVI.

Additamentum ad n. VIII.

Quae mihi innotuerunt tum lacrymarum vitrearum, tum phialarum quas Bononienſes dicunt phaenomena, omnia videntur ex illis, quae eo loco protuli explicari poſſe. Vnum tamen animum adhuc ſuſpenſum tenuit. Quas nactus ſum lacrymas, eae omnes ex vitro viridi fuerunt, phialae omnes ex albo. Cum anno 1759 per diem integrum commorarer Mundae, vbi Fulda Verrae iuncta Viſurgis effluit, officinam vitriariam ibi feruentem adii, et phialas mihi procuraui, lacrymas negarunt artifices formare ſe poſſe. Fit autem ibi vitrum album. Tunc belli turbae, et alia negotia impedierunt, ne de his accuratius inquirerem. Ita vero rationes ſubduxi: Si vitrum album, a furno candens frigidae immiſſum, ſtatim rimas agat, et ſubito diſſiliat, non poſſe ex illo lacrymas fieri, ſed ſolum ex viridi forte ſubitae refrigerationis patientiore. Quae in officina vitriaria examinandi, poſt occaſio mihi deficiebat, nihil enim curabam experimenta minuſcula, quae in poteſtate mea erant, cum maſſulis vitri in furno chymico liquatis. Commode accidit, vt poſt aliquot annos in notitiam venirem Dom. Eike Conſulis Mundenſis, V. Cl. quem cum intelligerem, et naturae cognitione, et ipſa abſtruſiore philoſophia delectari, petii ab eo, vt, quod veri ineſſet coniecturae meae, praeſens experiretur. Is vero litteris d. 30. Iul. 1770 datis, certiorem me fecit, recte me eſſe ſuſpicatum, maſſam ignitam vitri albi, frigidae immiſſam ſtatim diſſilire, retuliſſe etiam artifices, quod idem accidat, aquae feruenti iectae; praeterea, ferro quod catino immittitur, multo plus auferendum eſſe donec decidat, vitri albi quam viridis, vt album viſcidius videatur. Id diſcrimen vnde oriatur, fatetur ſe non ſatis intelligere ex eo quod intereſt inter materias, ex quarum mixtura vtrumque vitri genus oritur; conſtat enim, albo plus ineſſe ſalis alcalici et calcis metallicae, viridi plus terrei.

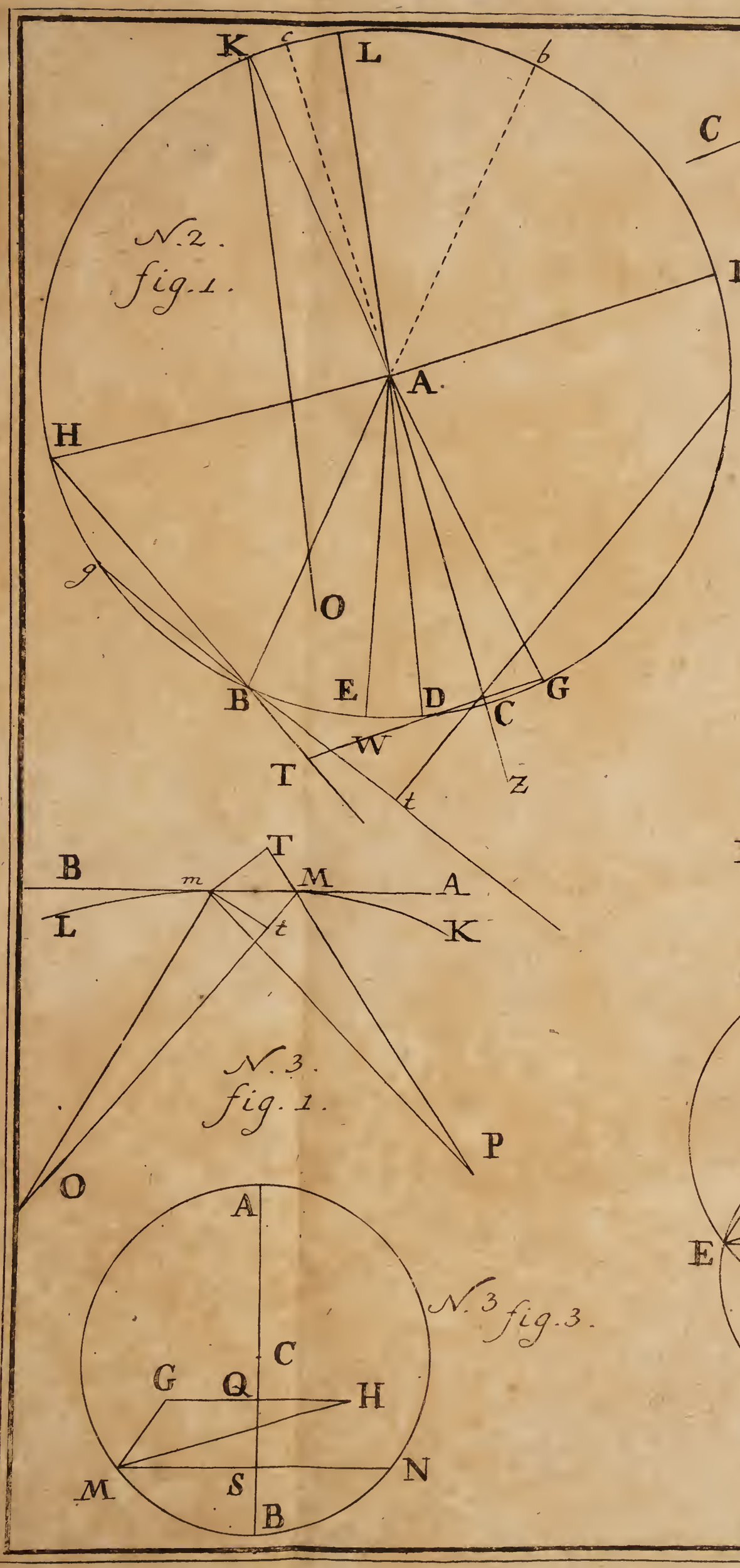
De

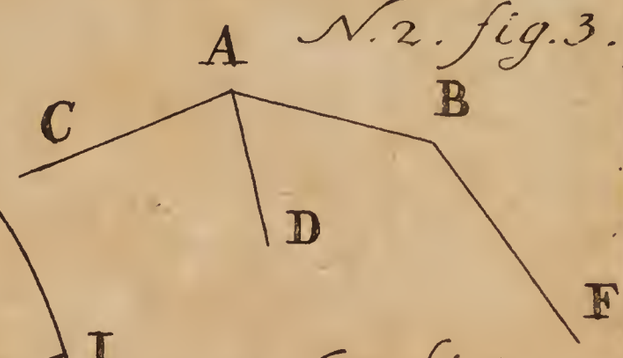
De erratis vt vocant typographicis.

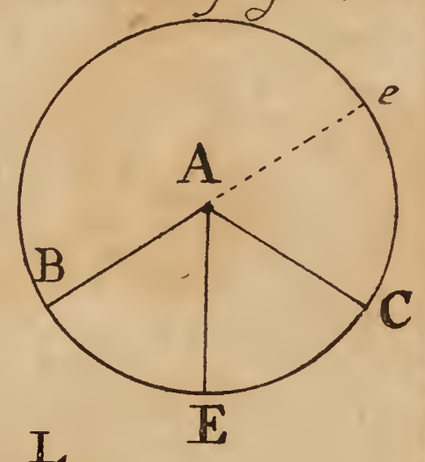
Cum is, cuius typis et impensis haec prodeunt, optices systemate et aliis meis editis, effeciſſet, vt et horum curam ipsi lubenter demandarem, exemplar miſi quod attentus relegeram, ille vero, vt in aliis rebus, ita et in erroribus typi vitandis impensis nullis pepercit. Itaque in schedis ab ipso mihi transmiſſis, emendanda multo pauciora reperi, quam sperari poterat in libro absente auctore impresso, et horum quaedam, in scripto exemplari se mihi subduxerant. Illorum, ea fere sola hic indicanda censeo, quae ad calculos pertinent.

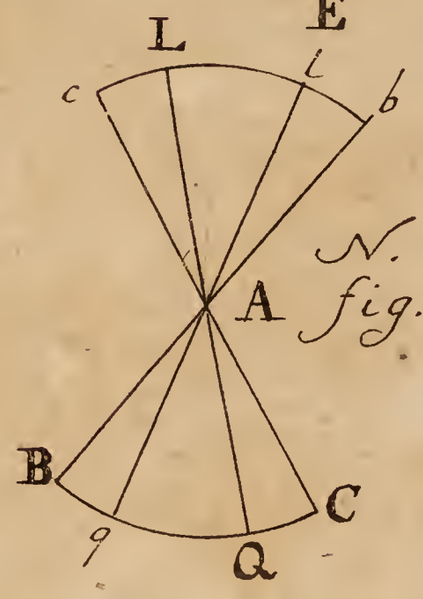
pag.			
26	lin. 28	loco Q	lege $\curvearrowleft$
28	lin. 35	loc. v	leg. r
29	lin. 18	loc. me α	leg. me $+\alpha$
30	§. 11. N. III. lin. 1	loco b + c z	lege (b + c). z
	2	$+\sqrt{}$	$\pm\sqrt{}$
31	lin 2	loco $=$ f	lege $\pm$ f
	VII. lin. 2	loc. x	leg. $+$
	§. 13. lin. 4	loc. u^2r^2	leg. $u^2 + r^2$
33	§. 15. lin. 3	loc. b +	leg. b + c
34	§. 21. lin. 2	loc. b) . . x	leg. b) . x
41	Cor. 7. lin. 2	loc. —	leg. $=$
45	§. 5. lin. 5	deleantur haec: et $\frac{BDq}{BF}$	seu $DI = m\sqrt{(1-mm)}.x$
	lin. vlt. in §. 8.	loc. pp	lege PP
46	§. 9. lin. vlt.	loco ,	pone .
55	lin. 4	loco GS	lege Gſ
	§. 67. l. log sin Q = 9809	l. log cos Q = 9,908	
67	lin. 8	l. A (cos η. sin α)	l. A sin (cos η. sin α)
68	Cor. 1. lin. 2	l. η	leg. n
69	Sol. lin. 12	l. minor	l. maior
	lin. vlt.	loc. k	leg. $\varkappa$
80	not. * lin. 1	l. Maleur	l. chaleur
87	§. 3. lin. 6	l. laſſiniana	l. Caſſiniana

pag.			
87	§. 4. lin. 6	loc. b 2 a	l. b $\curvearrowleft$ a
	9	7	y
94	Lemm. II. Sol. l. 1	loc. $\beta\gamma$	lege βr
96	6) lin. 3	HH	NH
97	11) lin. 2	loc. FQG	leg. FZG
	lin. 5	in Q	in Z
98	II. Cor. l. 3	cot $x^2 - 1$	cot $x^2 = 1$
107	Exempl. lin. 6	loco s	lege 5
108	l. 17	s	5
109	§. 46. l. 1	loc. quod rata	leg. quadrata
111	§. 56. l. 7	co	CO
112	§. 60. l. 5	Qp	QP
124	§. 99. l. 10	l. 1 : $\frac{\cos\frac{1}{2}\phi}{\cos\frac{1}{2}\xi}$	l. 1 : $\frac{\cos\frac{1}{2}\phi}{\cos\frac{1}{2}\xi}$
126	Ex. lin. 5	loco 1 ε	lege $\frac{1}{2}\varepsilon$
133	lin. 2	Z	Q
134	lin. 1	quo	quae
	§. 133. lin. 2	CT	CH
140	§. 160. l. 2	item	idem
144	not. ††† lin. 5	loc. Baillon	lege Baillou
	6	beriae	bariae
148	§. 10 lin. penult.	loc. nun-	leg. nuſ-

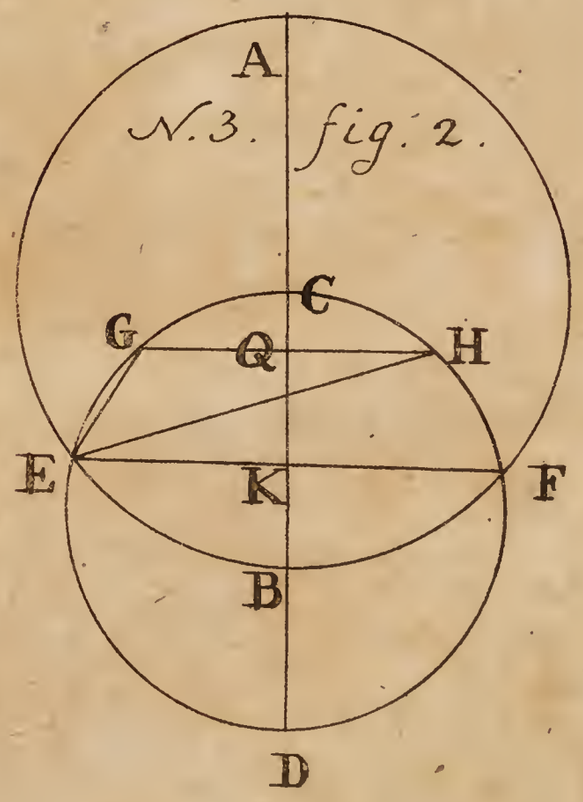

K
c
L
b
A
H
h
g
O
B
E
D
C
G
W
T
t
Z
I
N. 2.
fig. 1.


A
C
B
D
F
N. 2. fig. 3.


N. 2. fig. 2
e
A
B
C
E

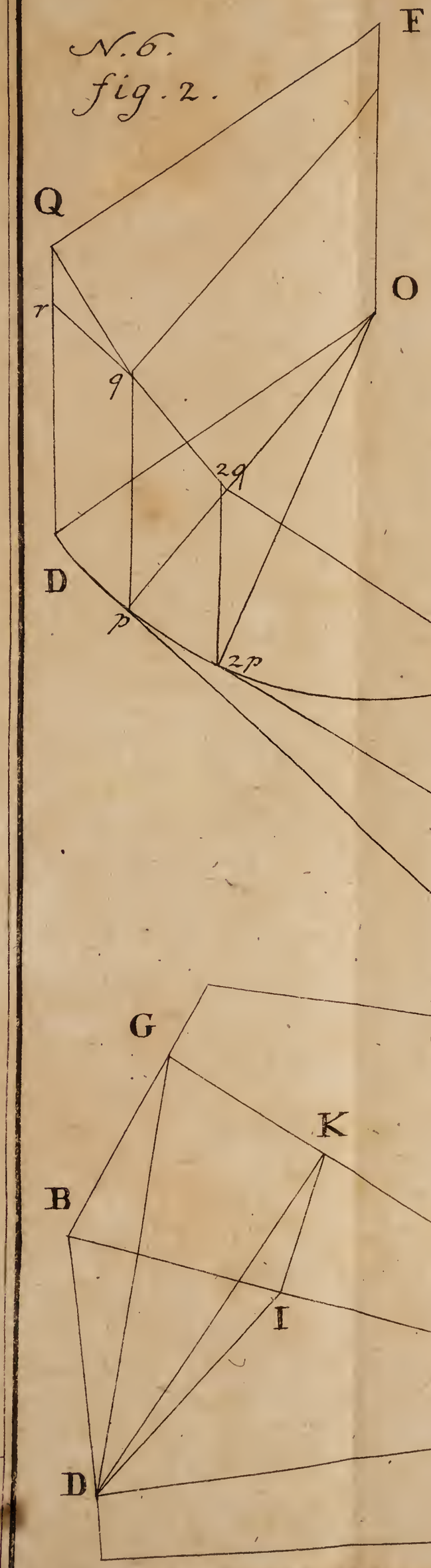

L
t
c
b
A
B
C
q
Q
N. 2.
fig. 4.

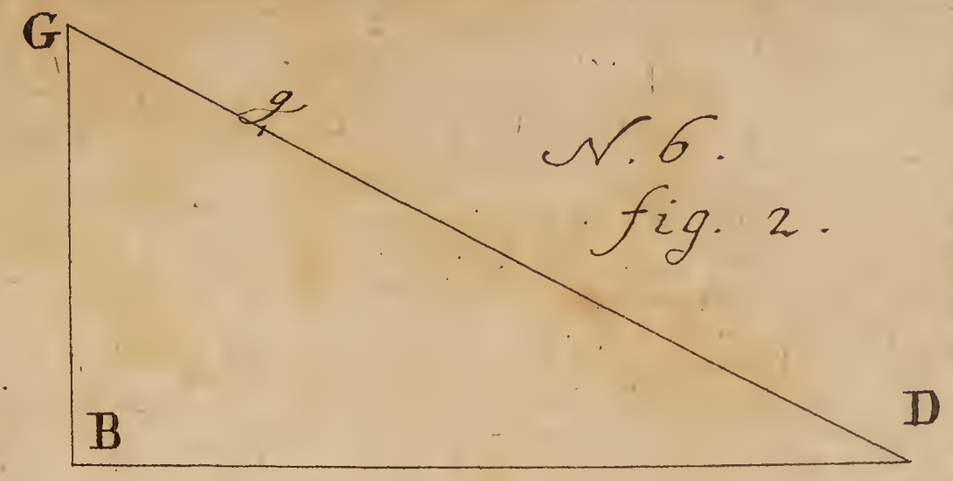
T
B
m
M
A
L
t
K
P
O
N. 3.
fig. 1.


A
C
G
Q
H
E
K
F
B
D
N. 3. fig. 2.

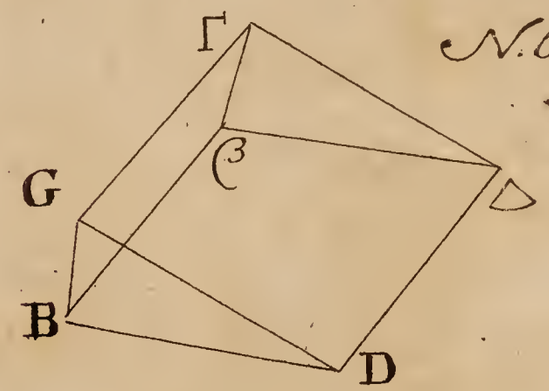
A
C
G
Q
H
M
S
N
B
N. 3 fig. 3.

Tab. I.

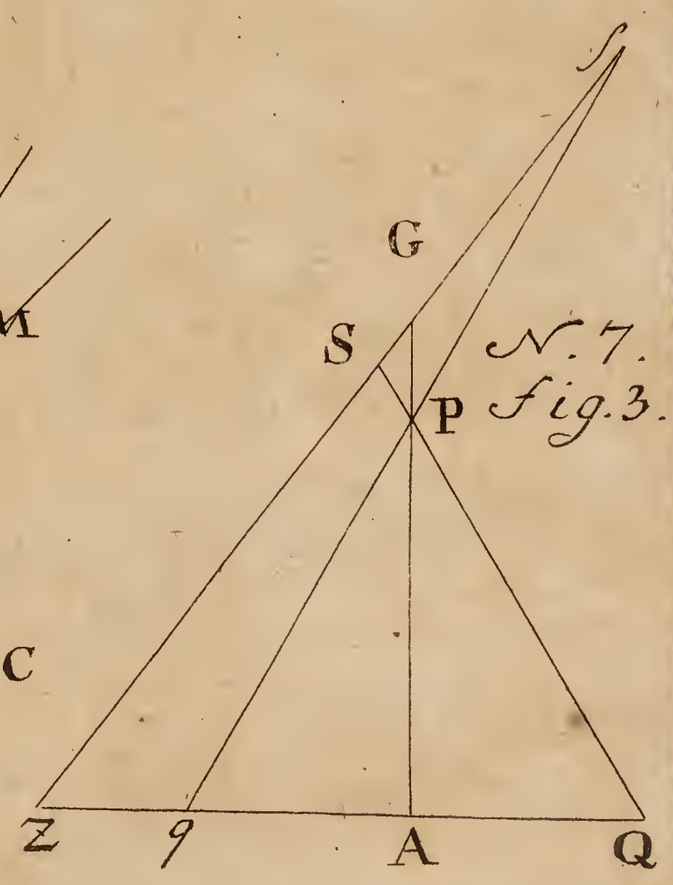




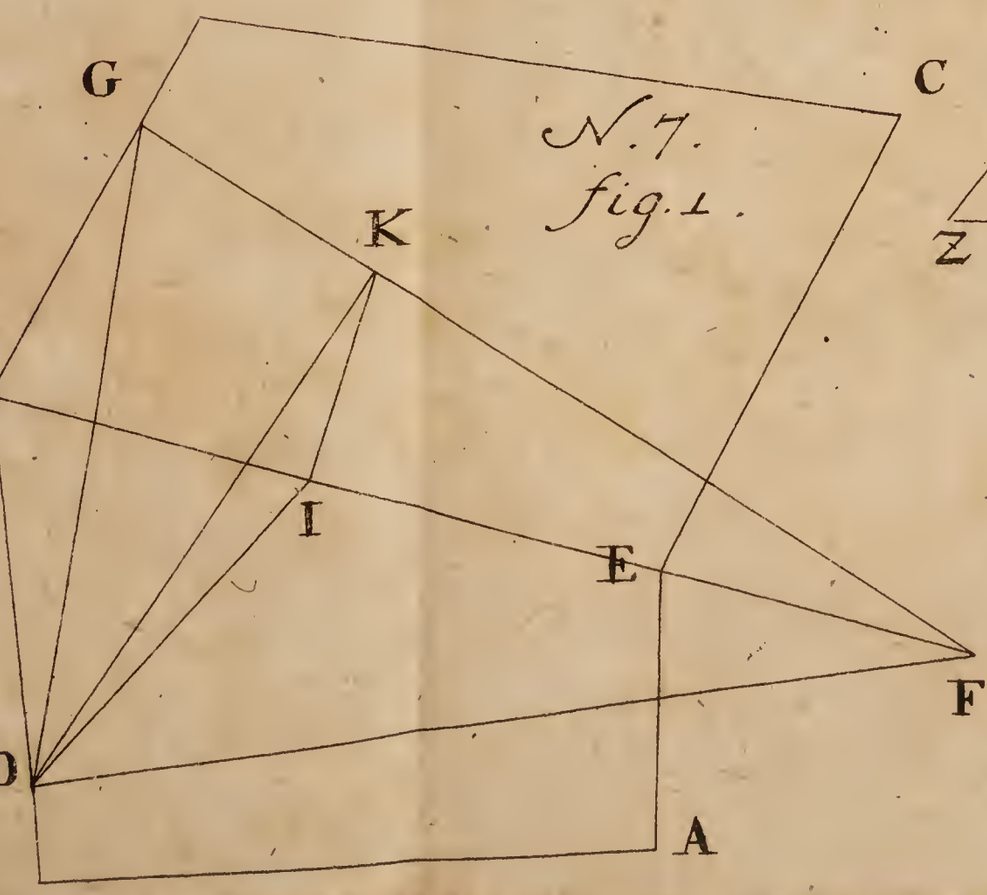
N.6. fig. 2.



N.6. fig. 1.

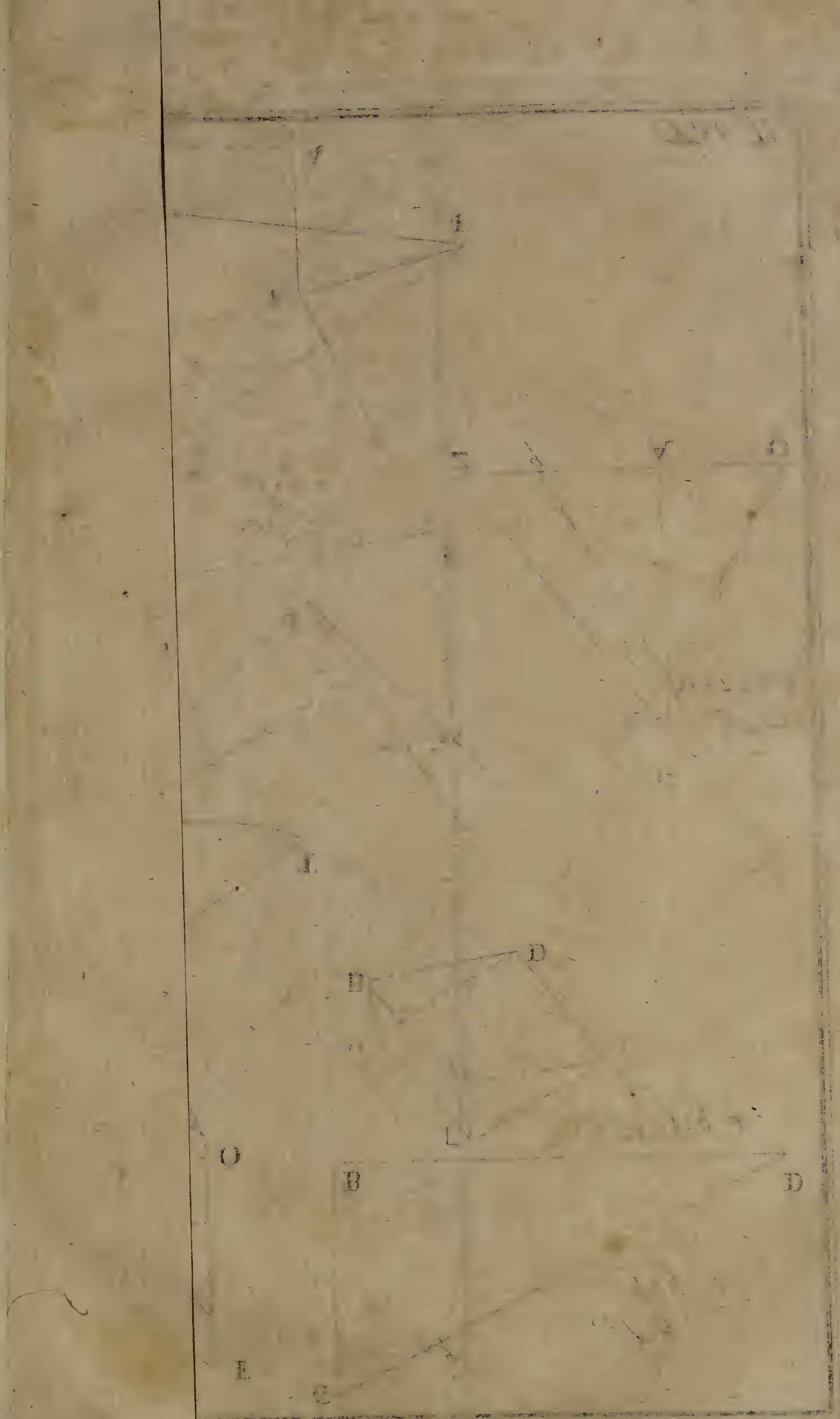


N.7. fig.3.

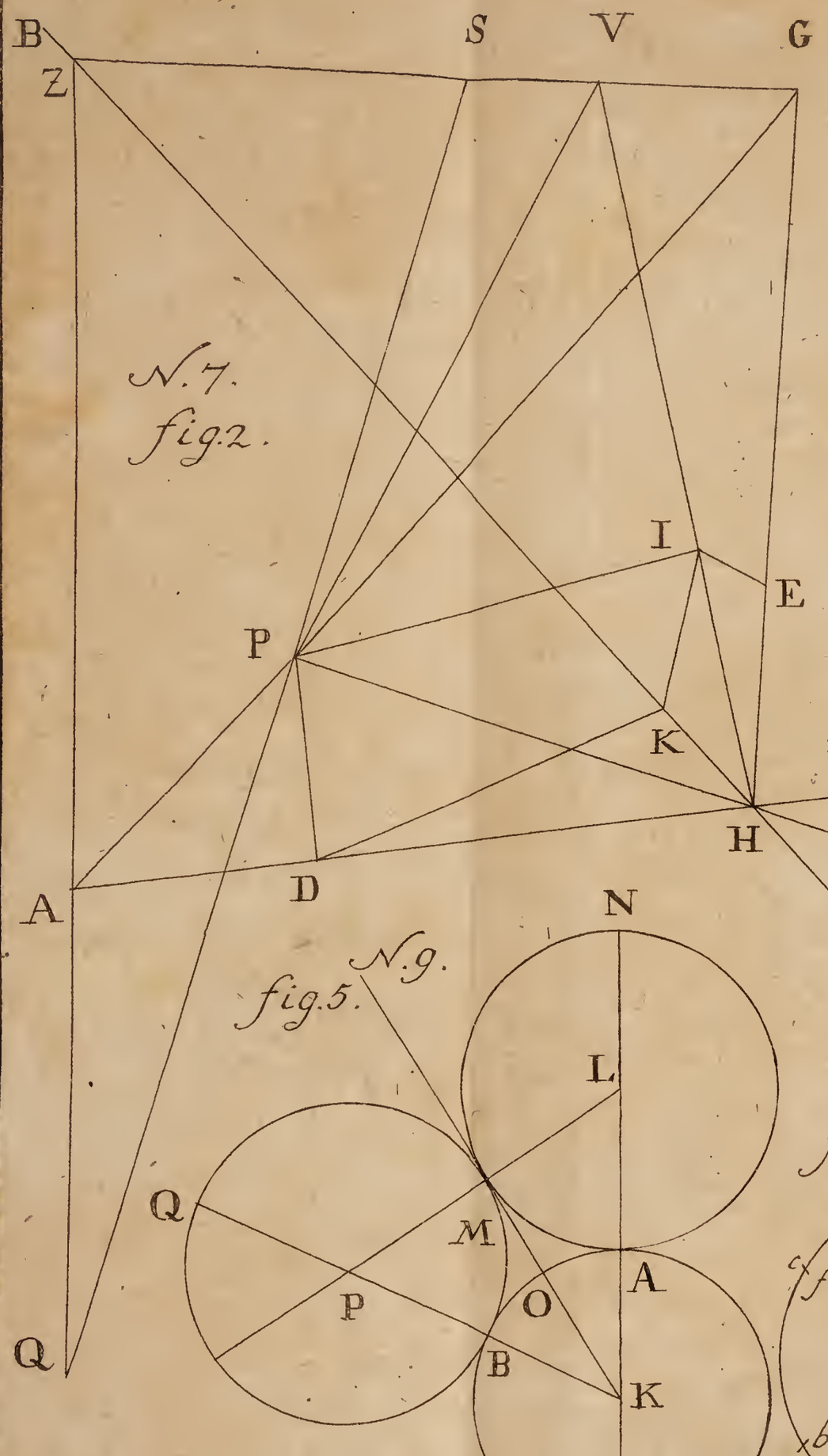


N.7. fig.1.

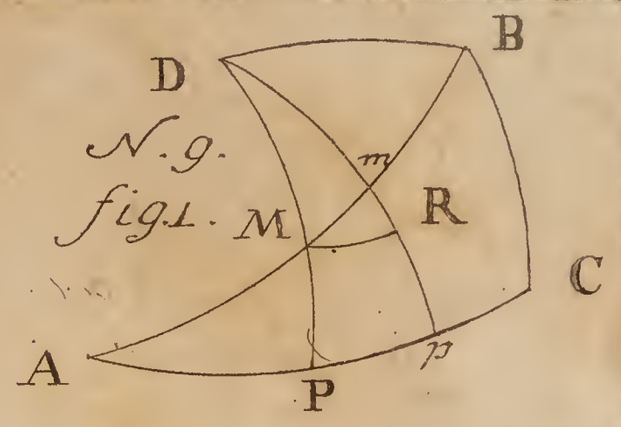
Tab. II.


D
D
L
O
B
D
E

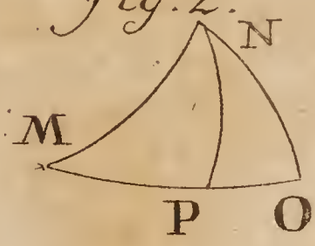
N. 7.
fig. 2.



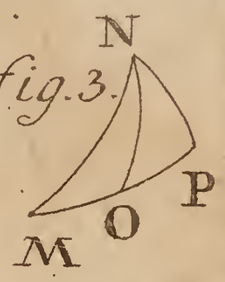
N. 9.
fig. 1.



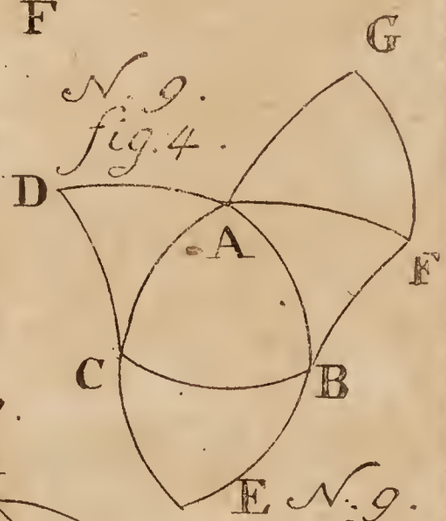
N. 9.
fig. 2.



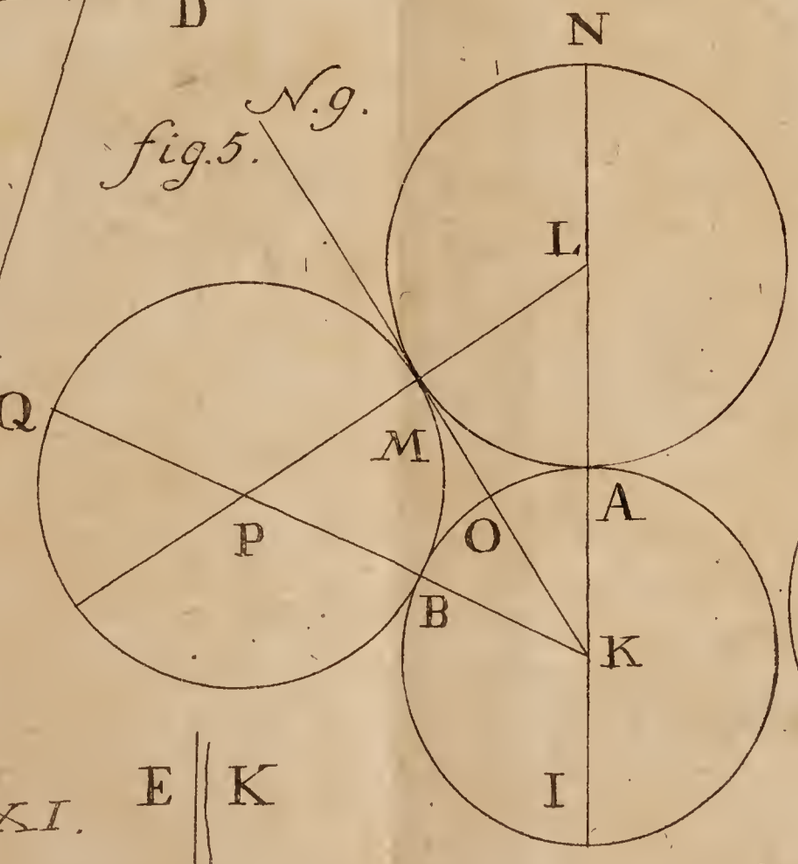
N. 9.
fig. 3.



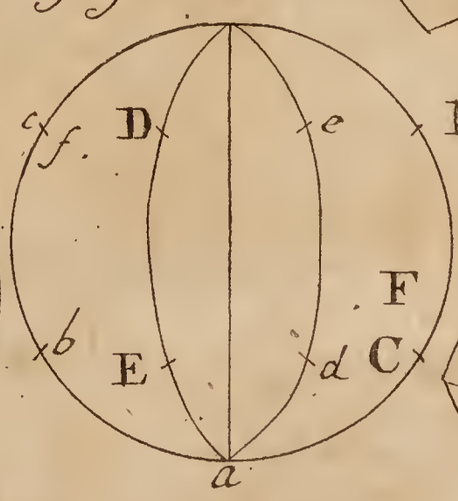
N. 9.
fig. 4.



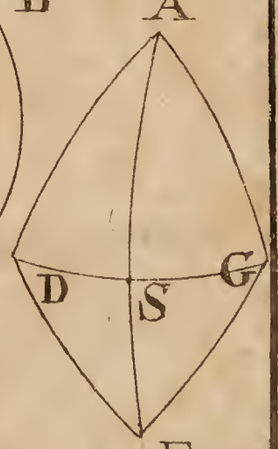
N. 9.
fig. 5.



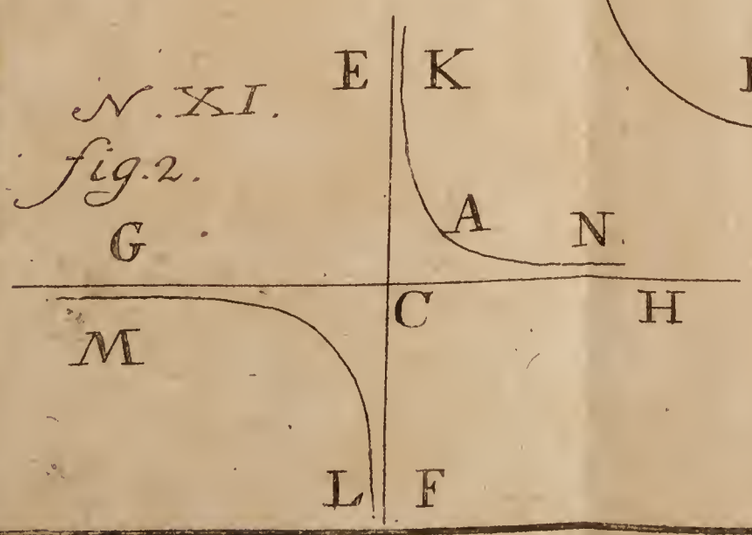
N. 9.
fig. 6.



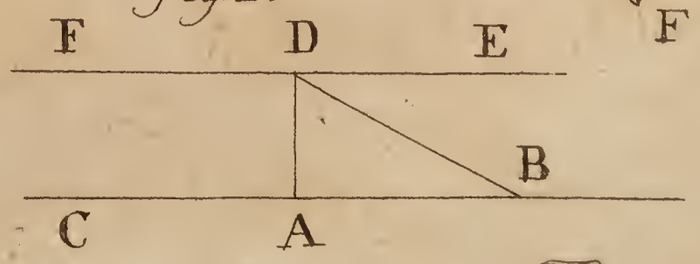
N. 9.
f. 6.



N. XI.
fig. 2.

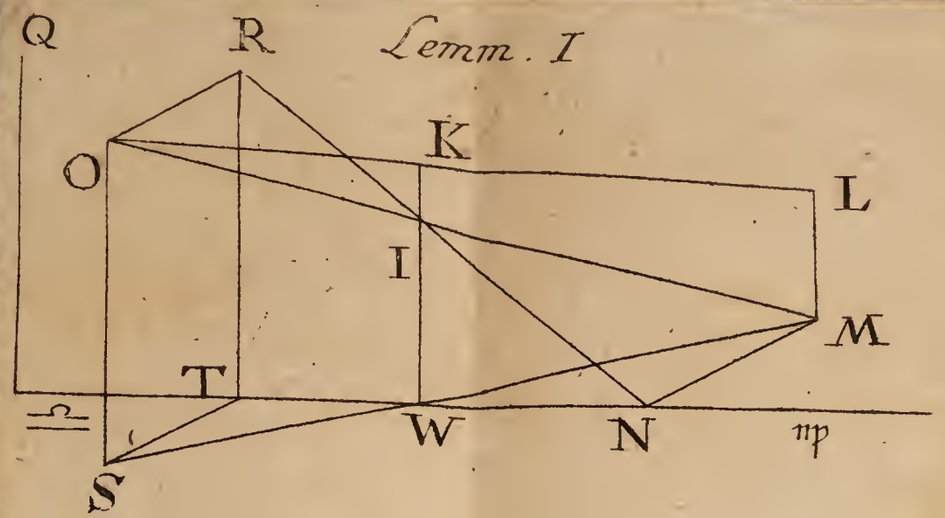


N. XI. fig. 1.

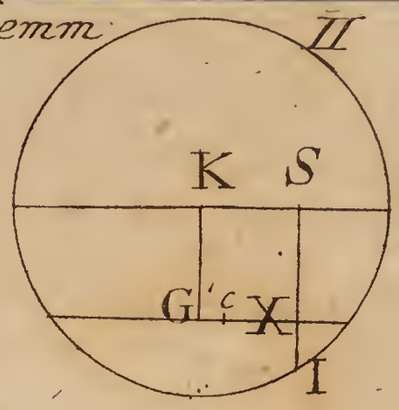


Tab. III.

Lemm. I

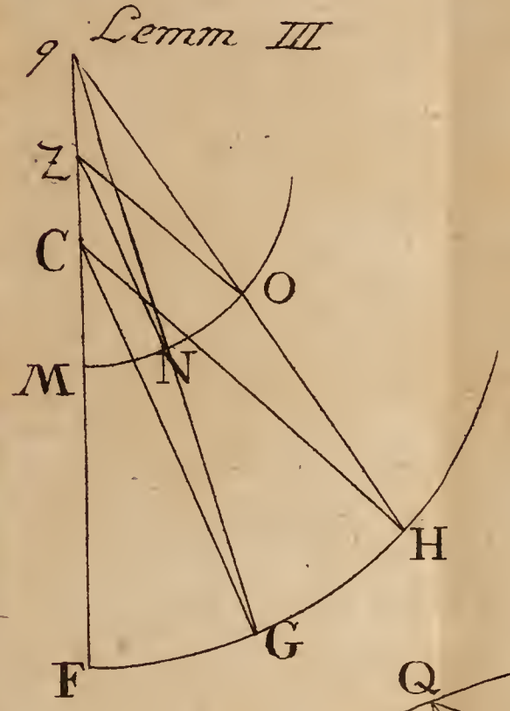


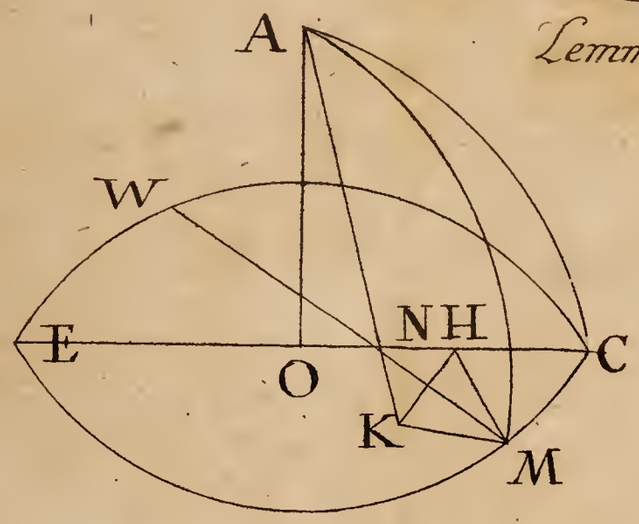
Lemm II

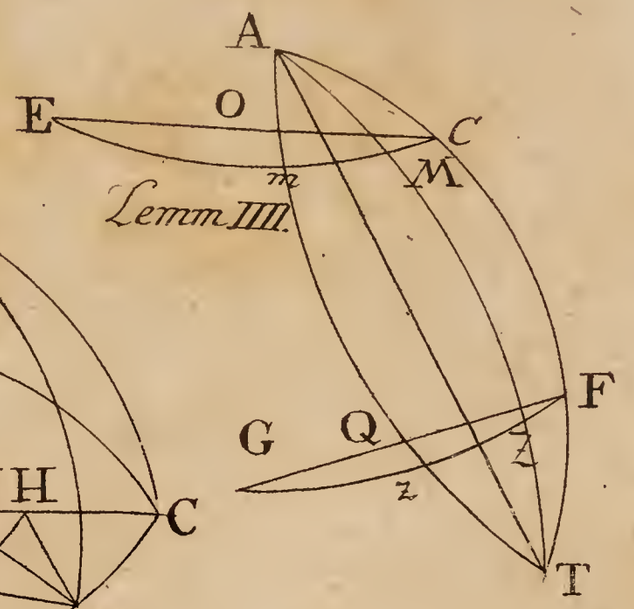


N. 12.

Lemm III



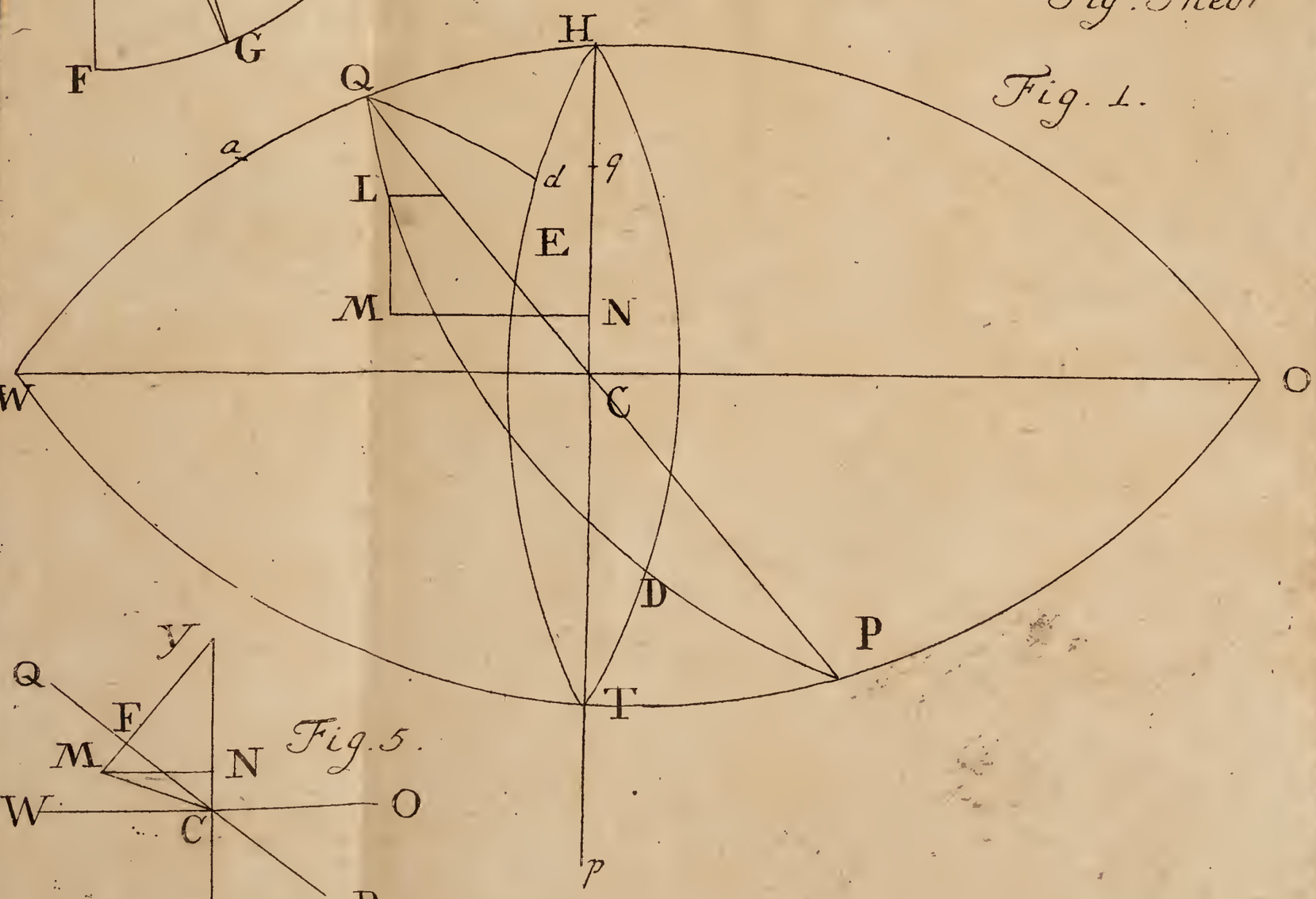




Lemm IIII.

Fig. Theor

Fig. 1.



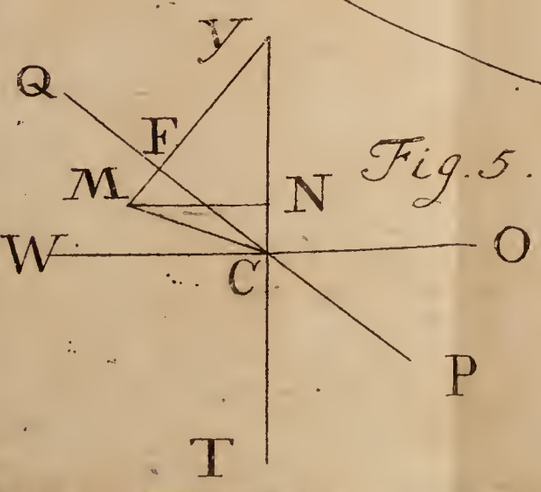


Fig. 5.

Tab. IIII.

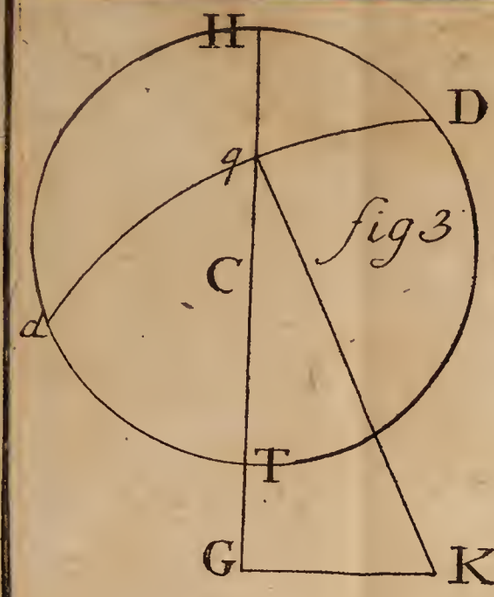


fig 3

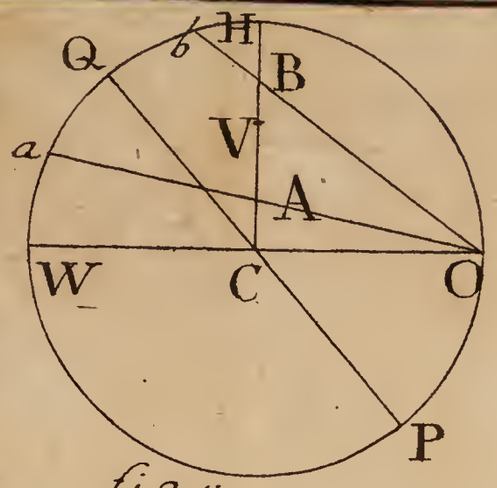


fig. 4.

fig. 5.

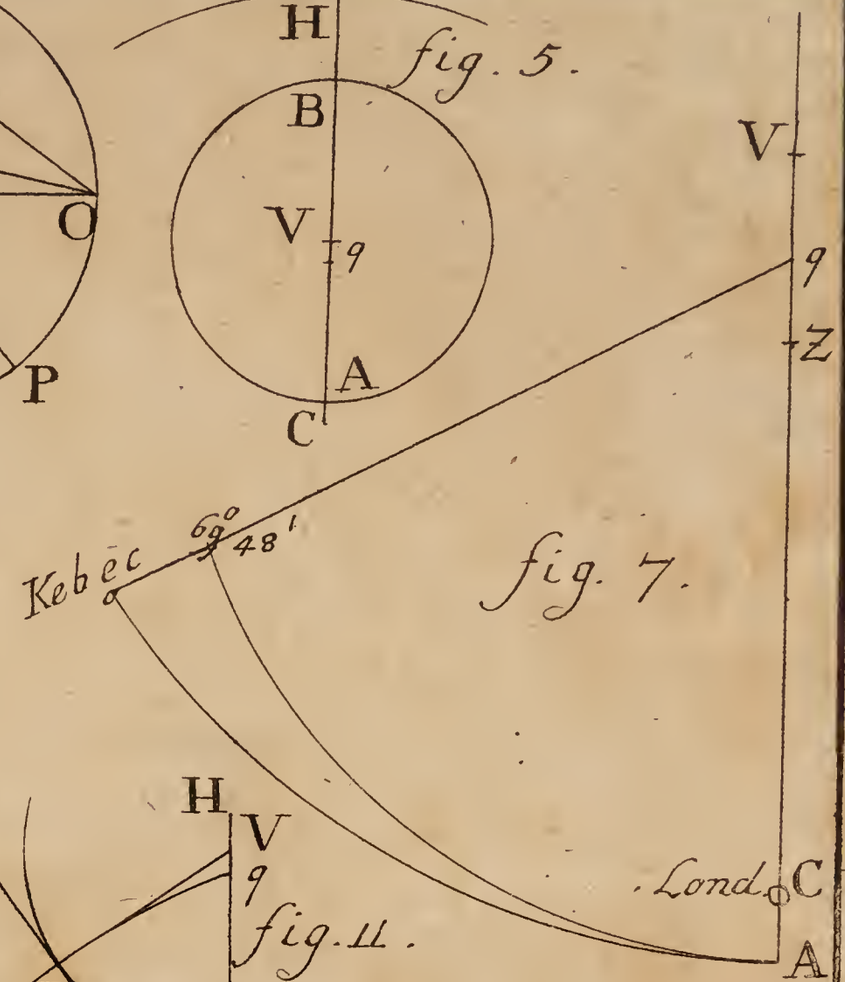


fig. 7.

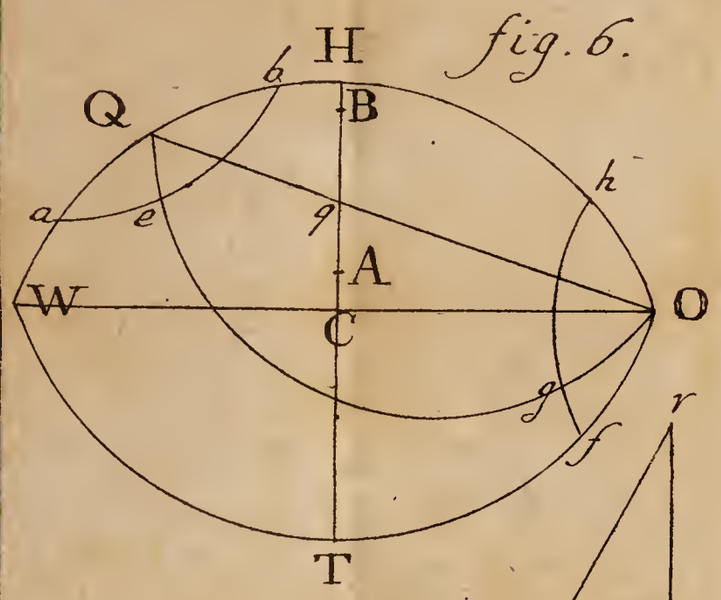


fig. 6.

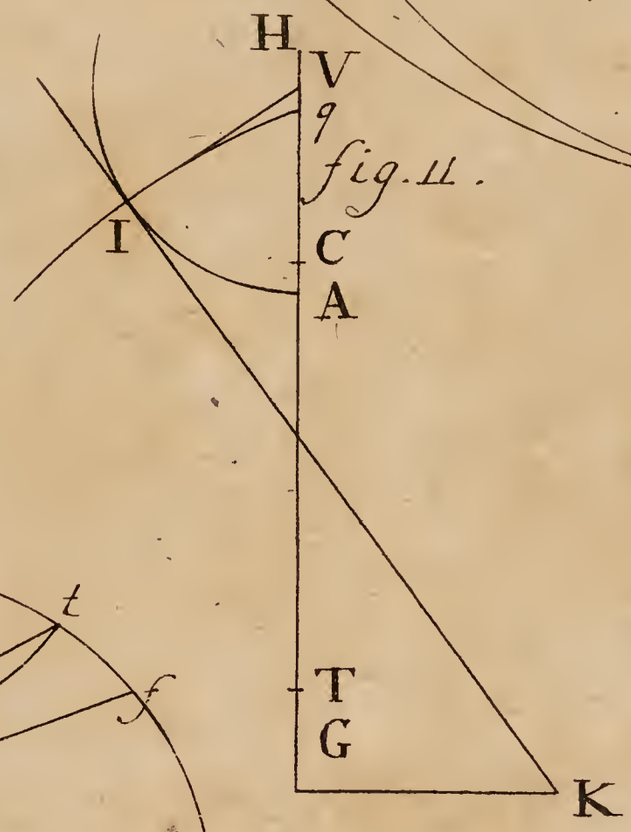


fig. 11.

N. 12

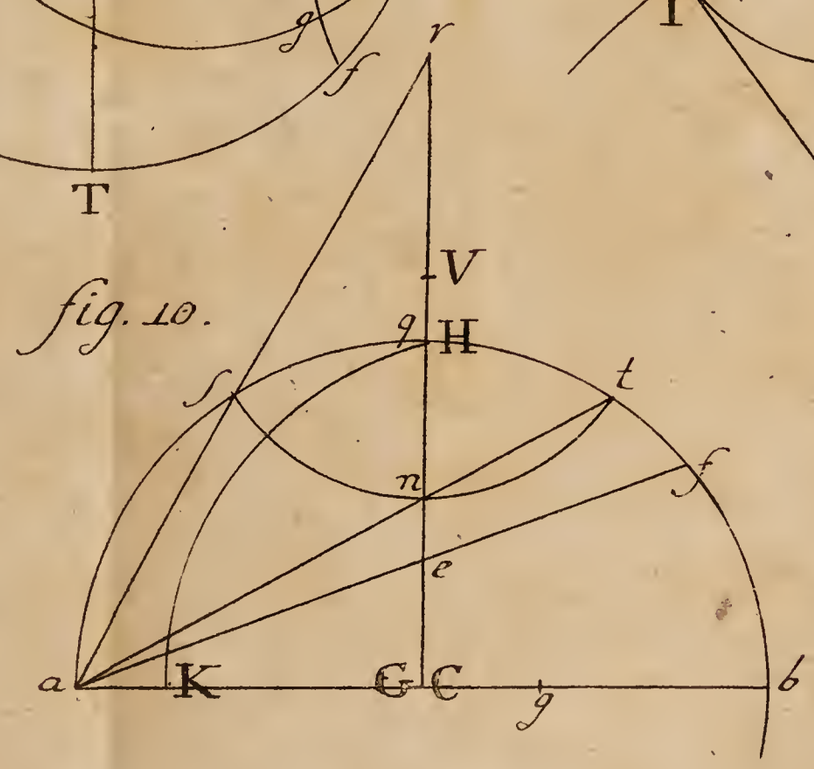


fig. 10.

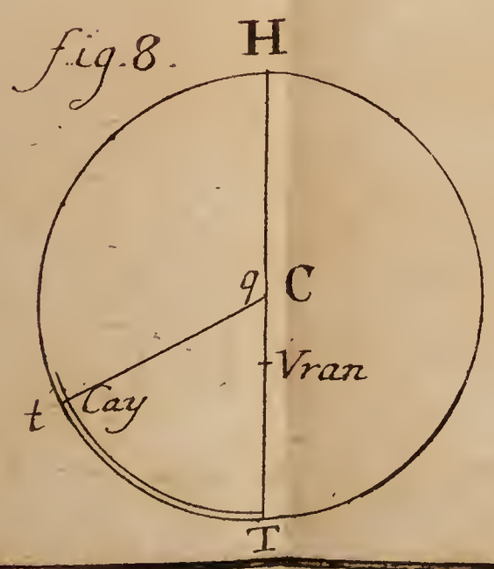


fig. 8.

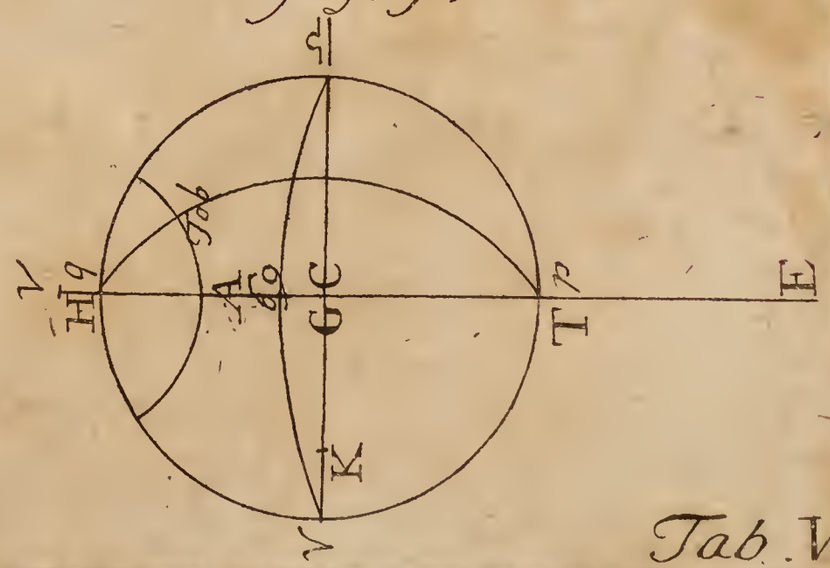
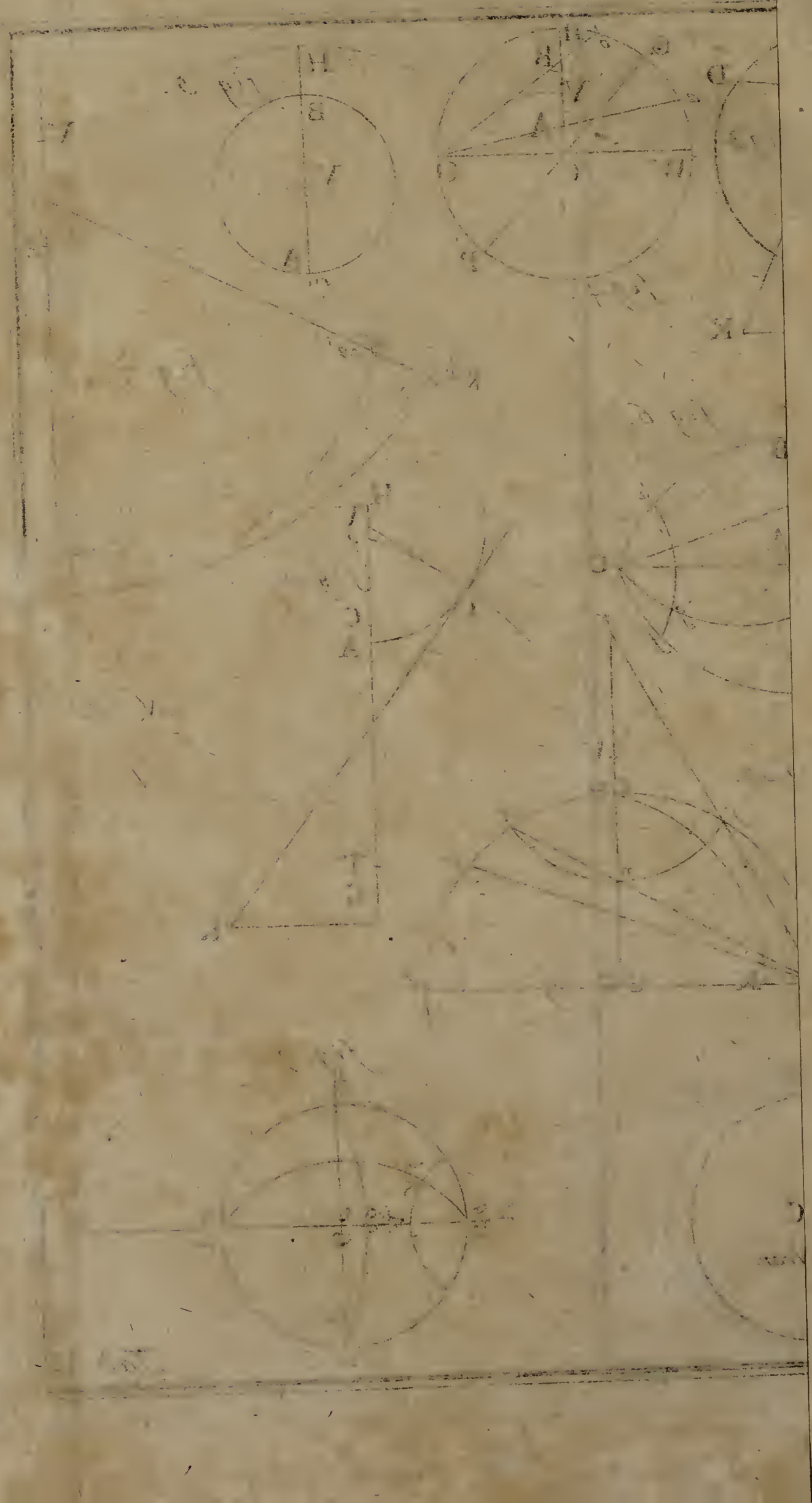


fig. 9.

Tab. V.



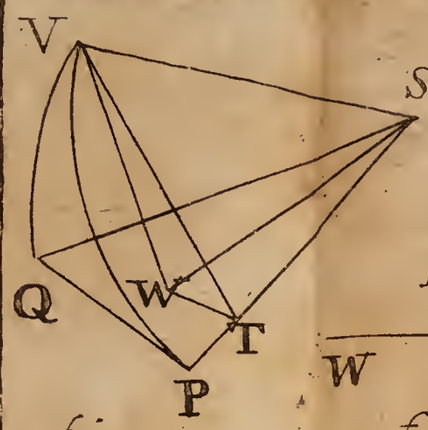


fig. 12.

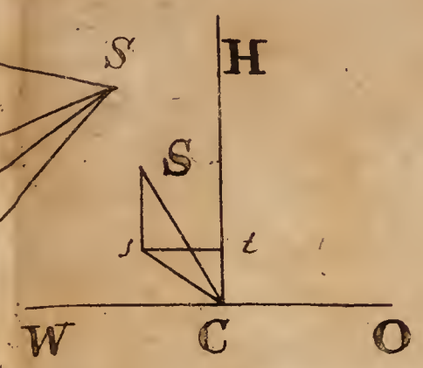


fig. 13.

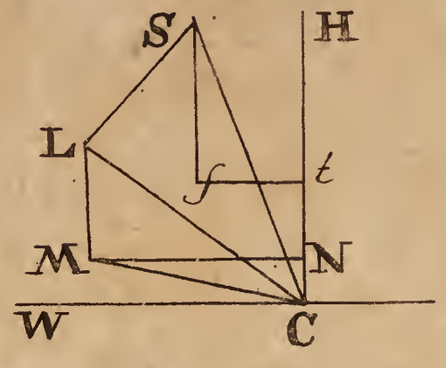


fig. 14

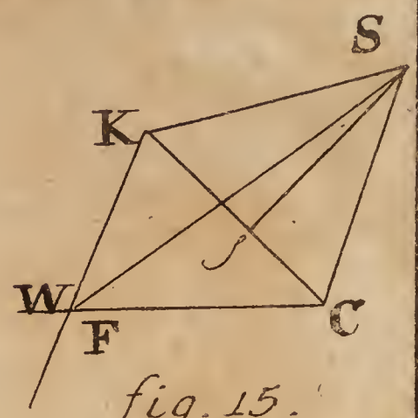


fig. 15.

N. 12.

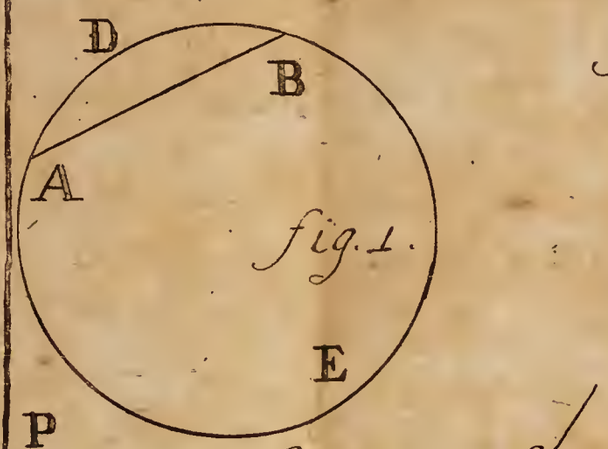


fig. 1.

N. 14.

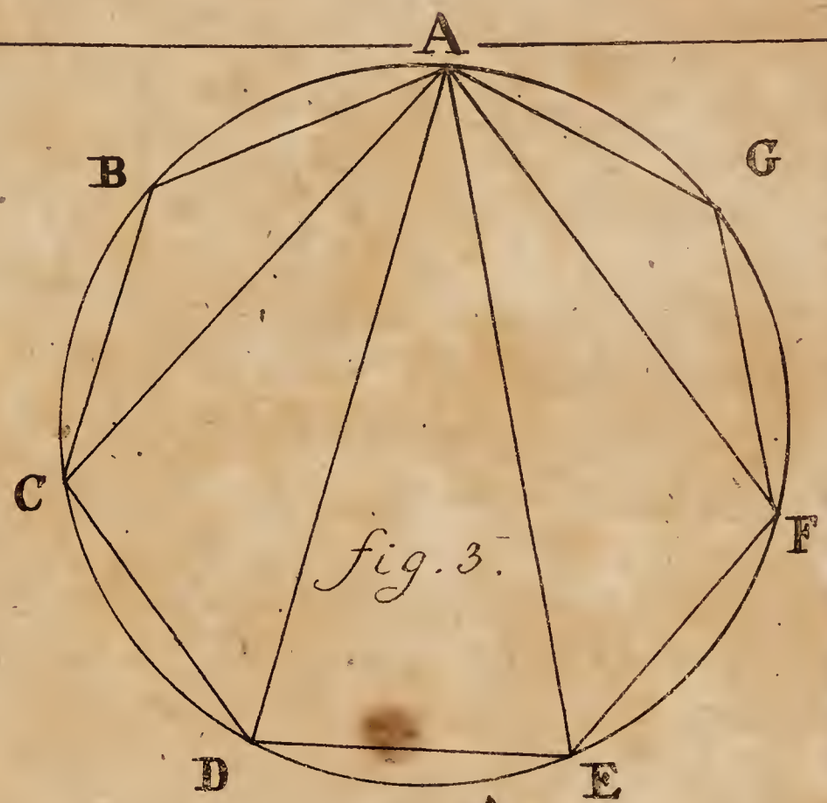


fig. 3.

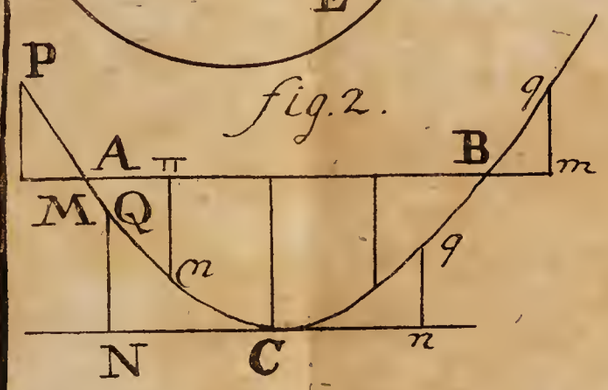


fig. 2.

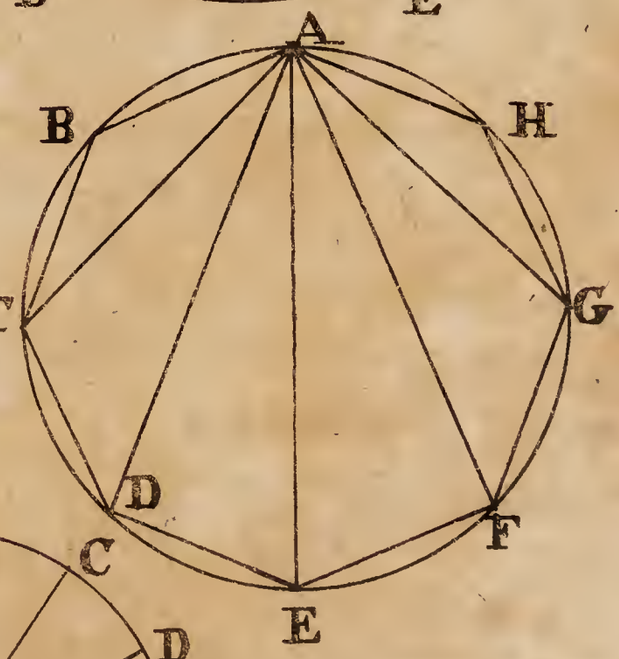


fig. 4.

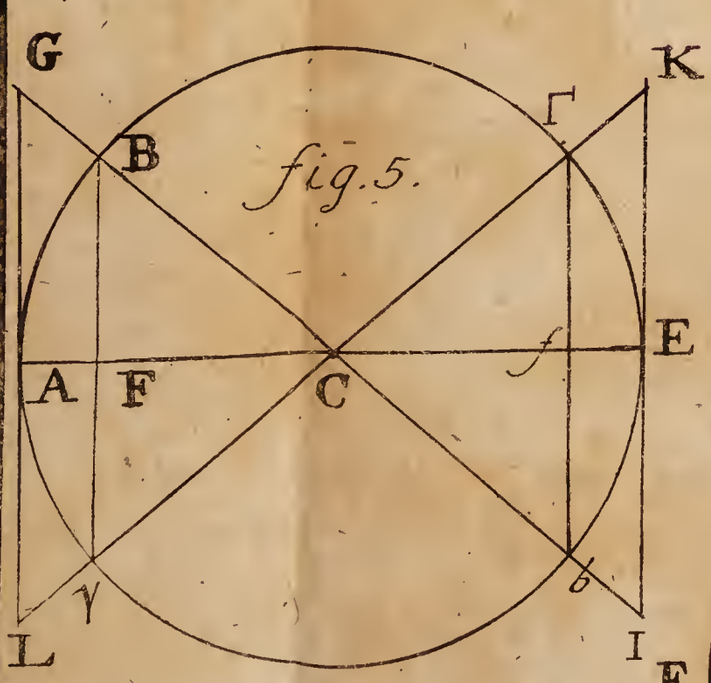


fig. 5.

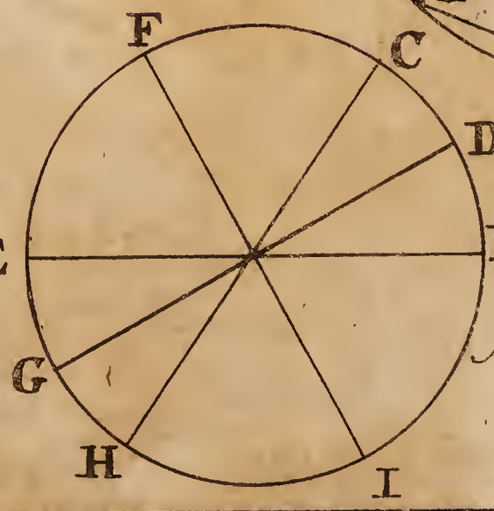


fig. 6.

Tab. VI.